10. 行列と線形代数 II

- Eigenvectors and eigenvalues
- Singular value decomposition
- Rank of a matrix
- Low-rank approximation of matrices

固有値と固有ベクトル

- `[V,D]=eig(A)`：正方行列**A**の固有値と固有ベクトルを計算
  - 固有値は対角行列内で昇順で格納される。

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = d_i\mathbf{v}_i \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{AV} = \mathbf{VD}$$

固有ベクトル
eigenvector

固有値
eigenvalue

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

```
>> A=randn(3,3);
>> [V,D]=eig(A)
V =
   0.52988 + 0.00000i  -0.05375 - 0.34548i  -0.05375 + 0.34548i
   0.68932 + 0.00000i   0.84473 + 0.00000i   0.84473 - 0.00000i
   0.49404 + 0.00000i   0.12431 + 0.38565i   0.12431 - 0.38565i
D =
Diagonal Matrix
   0.04533 + 0.00000i                    0                    0
                    0   2.09047 + 1.25277i                    0
                    0                    0   2.09047 - 1.25277i
>> A*V-V*D
ans =
   1.6306e-16 + 0.0000e+00i  -1.1102e-15 - 2.2204e-15i  -1.1102e-15 + 2.2204e-15i
  -1.5959e-16 + 0.0000e+00i   0.0000e+00 + 4.4409e-16i   0.0000e+00 - 4.4409e-16i
  -2.6368e-16 + 0.0000e+00i  -1.1102e-16 + 3.3307e-16i  -1.1102e-16 - 3.3307e-16i
```

対称行列の固有値・固有ベクトル

- 実対称行列の固有値は常に実数である。
  また、その固有ベクトルは直行する。 $\mathbf{V}^\top\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{V}^\top = \mathbf{I}$
  - 非対称行列の固有値は一般に複素数で表される(前ページ参照)
  - 工学で用いる行列は対称であることが多い。
  - 対称行列は行列**V**と行列**V**の転置行列よって対角化される。 $\mathbf{V}^\top\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{D}$
    （対称行列でない場合は行列**V**の逆行列を用いて対角化可能。）

```
>> X = randn(3,3);
>> A=X'*X;
>> [V,D]=eig(A)
V =
   0.960179   0.267639   0.080159
  -0.226697   0.914040  -0.336363
  -0.163292   0.304796   0.938315

D =
Diagonal Matrix
   0.015584          0          0
          0   1.752624          0
          0          0   6.254892
```

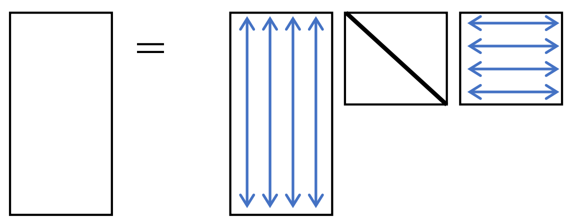
```
>> A*V-V*D
ans =
   1.2143e-17  -2.7756e-16   3.3307e-16
   9.1507e-17   0.0000e+00  -4.4409e-16
  -1.5179e-16   0.0000e+00   0.0000e+00

>> V'*A*V
ans =
   1.5584e-02   4.2718e-17  -1.7391e-16
  -1.3878e-17   1.7526e+00   2.2204e-16
  -2.2204e-16   4.4409e-16   6.2549e+00
```

行列の特異値分解(SVD: Singular Value Decomposition)（1/2)

- *m*×*n* の実行列は直行行列**U,V**と対角行列**W**を用いて次のように分解できる。：

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^\top$$



singular values

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}^\top\mathbf{U} = \mathbf{I} \qquad \mathbf{V}^\top\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{V}^\top = \mathbf{I}$$

- Remark: この分解は計算量を抑えたいときなどに役に立つ。

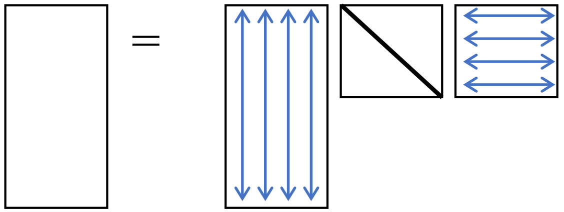
行列の特異値分解 (2/2)

- `svd`: 特異値分解を行うコマンド
  - 特異値分解はしばしば”SVD(Singular Value Decomposition)”と表記される。

```
>> X=randn(5,3);
>> [U,W,V]=svd(X,0);
>> W
W =
Diagonal Matrix
   3.07321         0         0
         0   1.73673         0
         0         0   0.82822
```

```
>> norm(U*W*V'-X)
ans =    1.5822e-15
>> norm(U'*U-eye(3))
ans =    6.7963e-16
>> norm(V'*V-eye(3))
ans =    2.3629e-16
```

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^\top$$



特異値分解と固有値・固有ベクトルの関係

- 行列**X**の特異値分解で得られたベクトル **V** は行列 **A=X'X** の固有ベクトルと一致する。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} \\
&= (\mathbf{UWV}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\mathbf{UWV}^{\mathrm{T}}) \\
&= \mathbf{VW}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{UWV}^{\mathrm{T}} \\
&= \mathbf{VW}^{2}\mathbf{V}^{\mathrm{T}} \\
\mathbf{AV} &= \mathbf{VW}^{2}
\end{aligned}
$$

```
>> X=randn(10,3);
>> [V1,D]=eig(X'*X);
>> [U,W,V2]=svd(X,0)
>> V1
V1 =
  -0.69324   -0.61974   -0.36789
   0.14611    0.37901   -0.91379
   0.70574   -0.68722   -0.17219

>> V2
V2 =
   0.36789    0.61974    0.69324
   0.91379   -0.37901   -0.14611
   0.17219    0.68722   -0.70574
```

- 行列**X**の特異値は行列 **A=X'X** の固有値の平方根と一致する。

```
>> sqrt(D)
ans =
Diagonal Matrix
    1.9851          0          0
         0     3.9417          0
         0          0     4.7675
```

```
>> W
W =
Diagonal Matrix
    4.7675          0          0
         0     3.9417          0
         0          0     1.9851
         0          0          0
         0          0          0
         0          0          0
         0          0          0
         0          0          0
         0          0          0
         0          0          0
```

特異値分解の特性

- 行列 **X** の疑似逆行列を特異値分解を用いて記述することが可能。

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^\top$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{X}^\dagger = \mathbf{V}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{U}^\top$$

```
>> X=randn(5,3);
>> pinv(X)
ans =
   0.037163  -0.070115  -0.329386   0.373801  -0.323277
  -0.116157  -0.215984  -0.339899  -0.014697  -0.207555
  -0.066574  -0.156025   0.513828   0.023533  -0.501137

>> [U,W,V]=svd(X,0);
>> V*inv(W)*U'
ans =
   0.037163  -0.070115  -0.329386   0.373801  -0.323277
  -0.116157  -0.215984  -0.339899  -0.014697  -0.207555
  -0.066574  -0.156025   0.513828   0.023533  -0.501137
```

- 行列**X**のゼロでない特異値の個数は行列Xのランクと一致する。

```
>> X=randn(5,2)*randn(2,4)
X =
  -0.065735  -0.053739   1.626185   1.734253
  -0.022809  -0.020869   0.637444   0.672717
   0.151451   0.140834  -4.307108  -4.539055
   0.563733   0.153728  -3.832887  -5.067102
  -0.246376  -0.082560   2.181361   2.705379
>> rank(X)
ans =  2
>> svd(X)
ans =
   9.9100e+00
   6.0159e-01
   2.4902e-16
   1.6489e-17
```

行列のランク

- 同値な定義がいくつかある。

  1)その行列から取り出せる正則行列(逆行列が存在する行列)で最大のサイズ

  2)一次独立な行(or列)ベクトルの本数

  3)・・・

例えば　$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$　について、2×2の部分行列の一つ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ は

正則行列だが、他の3×3の部分行列は全て非正則行列。

よって $\mathrm{rank}\,\mathbf{A}=2$ となる。

一次独立なベクトルの本数についても調べてみてください。

特異値分解による行列の低ランク近似

- 次の問題を考える: 与えられた行列Aに対し、行列Aに可能な限り近いランク”r”の行列を求めたい。
- 制約付最小化問題として定式化:

$$\min_{\hat{\mathbf{A}}} \|\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}\|_F \quad \text{subject to} \quad \mathrm{rank}(\mathbf{A}) = r$$

- 特異値分解を用いることで次の様に簡単に求めることが出来る。:

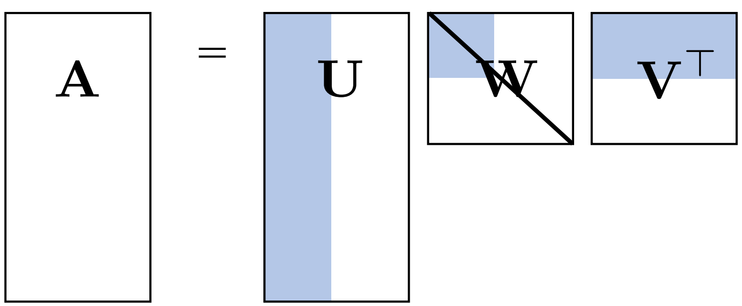
$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^\top$$

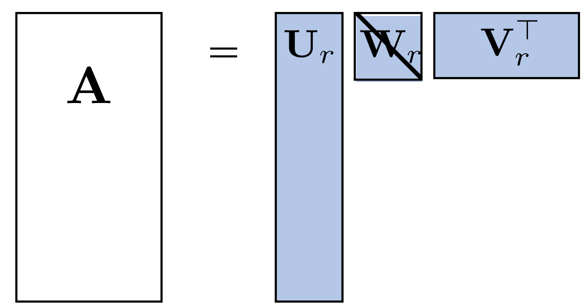
$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \ldots, \mathbf{u}_n] \\ \mathbf{W} &= \mathrm{diag}[w_1, \ldots, w_r, \ldots, w_n] \\ \mathbf{V} &= [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \ldots, \mathbf{v}_n] \end{aligned}$$

単純に
(r+1) 列目から
n列目のベクトル
を削除するだけ

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{U}_r\mathbf{W}_r\mathbf{V}_r^\top$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_r &= [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r] \\ \mathbf{W}_r &= \mathrm{diag}[w_1, \ldots, w_r] \\ \mathbf{V}_r &= [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r] \end{aligned}$$





画像を特異値分解により圧縮した例

Octaveに読み込み

```
>>img = imread(‘lena.gif’);
```

表示

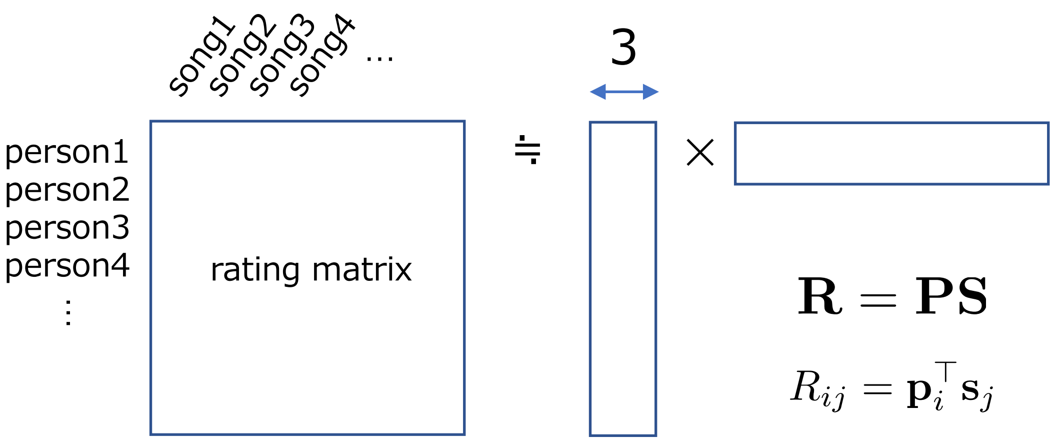
```
>>imshow(img)
```

低ランク近似
(508→384)

課題 10.1

- 楽曲のレーティングを予想したい。

- 楽曲の好き嫌いに同じ傾向を示す場合がある。
  - と言っても、 正確に同じ嗜好を持つ人はいない。
  - この種の問題は"協調フィルタリング"として知られている。
- レーティング行列をランク"3"の行列に低ランク近似する。



$$\mathbf{R} = \mathbf{PS}$$

$$R_{ij} = \mathbf{p}_i^\top \mathbf{s}_j$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^\top \\ \mathbf{p}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{15}^\top \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \cdots, \mathbf{s}_{20}]$$

*補足

$$\mathbf{R} \fallingdotseq (\mathbf{P}\mathbf{W}_3\mathbf{V}^\mathrm{T}) = \mathbf{PS}$$

or

$$\mathbf{R} \fallingdotseq (\mathbf{U}\mathbf{W}_3\mathbf{S}) = \mathbf{PS}$$

と見ることができる

課題 10.1

- 15人による20楽曲のレーティング情報が利用可能である。
  - 講義のページから `rating.txt` をダウンロードして読み込む

```
>> load('rating.txt')
```

  - レーティングは1~5の５段階評価で示されている。
  - “R(2,4)=3” は２番目の人が4番目の楽曲に対して3というレーティングを付けたことを意味する。
- データに無い別の人(16番目の人)が３楽曲にレーティングを付けたと仮定する。
  - song1=4, song3=2, song7=3, i.e., $R_{16,1} = 4,\ R_{16,3} = 2,\ R_{16,7} = 3$
- この人が他の楽曲にどのようなレーティングを付けたかを推定してください。
  - 初めにランク”3”に近似した行列**R**を見つける。例 ; obtain 15x3 **P** and 3x20 **S**
  - 次に, 次の式を満たすベクトル p_{16} を見つける:

$$R_{16,1} = \mathbf{p}_{16}^\top \mathbf{s}_1$$
$$R_{16,3} = \mathbf{p}_{16}^\top \mathbf{s}_3$$
$$R_{16,7} = \mathbf{p}_{16}^\top \mathbf{s}_7$$

  - 最後に, 次の式でレーティングの予測を計算する。$R_{16,j} = \mathbf{p}_{16}^\top \mathbf{s}_j$
  - 実際のレーティングは次の通り:

4 3 2 2 3 3 3 2 3 1 2 3 2 2 3 4 3 3 3 3

ヒント：LSI(Latent Semantic Indexing: 潜在的意味索引)や
LSA(Latent Semantic Analysis: 潜在的意味解析)などを参照

行および列の取り除き方の例

```
>> [U,W,V]=svd(img,0);
>> size(U)
ans =
  512  512
>> U1=U(:,[1:128]);
>> size(U1)
ans =
  512  128
```

```
>> [U,W,V]=svd(img,0);
>> size(U)
ans =
  512  512
>> U(:,[129:512])=[ ];
>> size(U)
ans =
  512  128
```

提出先：
東北大学インターネットスクール(ISTU)上で提出
もしくは
Email: hisashi.kino.a1＠tohoku.ac.jp
shimada@m.tohoku.ac.jp

〆切：
2019年7月26日(金)の午前8:50