

2019年7月1日更新

Exercises in Computer-Aided Problem Solving

# 7. 信号処理

## Signal processing

東北大学 大学院工学研究科

嶋田 慶太 [shimada@tohoku.ac.jp](mailto:shimada@tohoku.ac.jp)



TOHOKU  
UNIVERSITY



TOHOKU  
UNIVERSITY

# オーディオデータの読み込み



# オーディオデータの読み込み

## ▶ 音声信号の読み取り: `audioread`

```
>> [x, freq]=audioread('test.wav');
```

x: 音声の強度信号

列ベクトルに各チャンネルの信号を格納  
(1ch. ▶モノラル・2ch. ▶ステレオ)

freq: サンプリング周波数 ▶ 逆数: サンプリング間隔

## ▶ 音声信号の再生: `sound`

```
>> sound(x, freq);
```

そのまま再生

```
>> sound(x, 0.7*freq);
```

周波数を落として再生

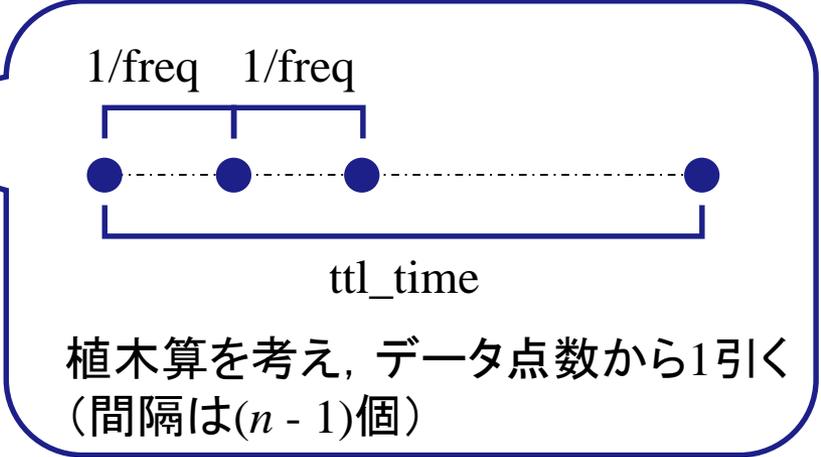


# 横軸(時間軸)の設定

```
>> N = rows(x);
>> ttl_time = (N-1)/freq;
```

N: データ点数 行数を数える関数: rows  
(列数を数える関数は columns)

ttl\_time: サンプリングしたトータルの時間



```
>> t=linspace(0,ttl_time,N)';
```

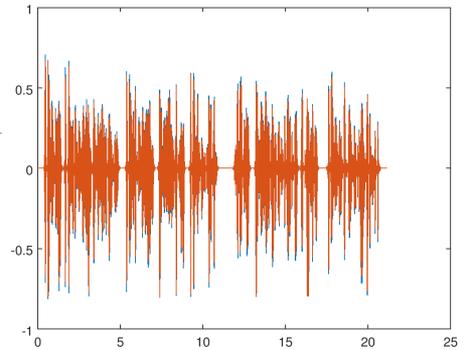
xと合わせるために転置  
(しなくてもグラフは描ける)

`linspace(start, goal, n)` : start から goal までを等間隔に区切った  $n$  列の行ベクトル

```
>> plot(t,x)
```

横軸: 時間

縦軸: 強度



音声信号の例  
(実際のtest.wavは全く違う)



TOHOKU  
UNIVERSITY

# この授業での列ベクトルと行列の表現(2)

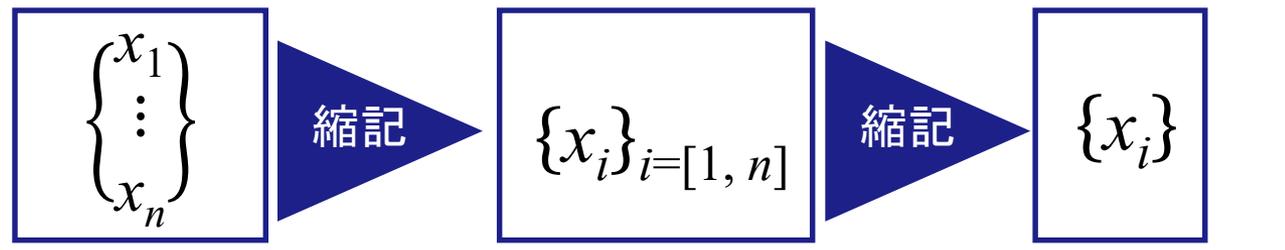


# この授業での行列・列ベクトルの表現

## 列ベクトル

### ▶ 波括弧 {} で表現

\*世界的にこれがスタンダードというわけではないので  
もし別の機会で使おうと思ったら、ルールを書いてください。



例えば  
 $\{1\}$   $\{0\}$   
 は全要素が  
 1, 0の列ベクトル

- \*  $\mathbf{x}$ のように太字もよく使う。
- \* 行ベクトルは  $\{x_i\}^T$ のように列ベクトルの転置で表す

## 行列

### ▶ 大文字もしくはは角括弧 [] で表現

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

例えば  
 $[\{x_i\}\{y_i\}]$   
 は  $i$  行の成分が  $x_i, y_i$  の  $n \times 2$  行列



# 関数と関連した列ベクトルの表現

0からはじまり,  
1ずつ増える  
 $N$ 次元列ベクトル

◀ を用いた表現

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ N-1 \end{Bmatrix} = \{i\}$$

今回は0から  
であることに注意

$$\begin{Bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot 0\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot 1\right) \\ \vdots \\ \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot (N-1)\right) \end{Bmatrix} = \cos\left(\frac{2\pi}{N} \{i\}\right)$$

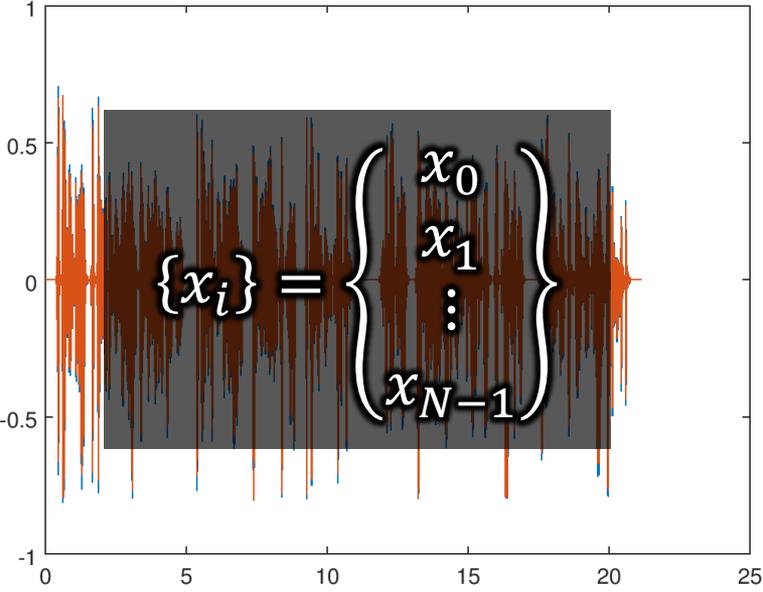
Octaveの引数と同様に、引数部分をベクトルで表し、全体もベクトルで表されることとする。



# 離散フーリエ変換(DFT)



# 信号は波の重ね合わせ(証明はしないけど)



$N$ 次元ベクトルとして格納されているデータ

$$\begin{aligned}
 & \frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \{t_i\} \cdot 0\right) \\
 & + a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \{t_i\} \cdot 1\right) \\
 & + a_2 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \{t_i\} \cdot 2\right) \\
 & \vdots
 \end{aligned}
 =
 \begin{aligned}
 & + b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \{t_i\} \cdot 1\right) \\
 & + b_2 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \{t_i\} \cdot 2\right) \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

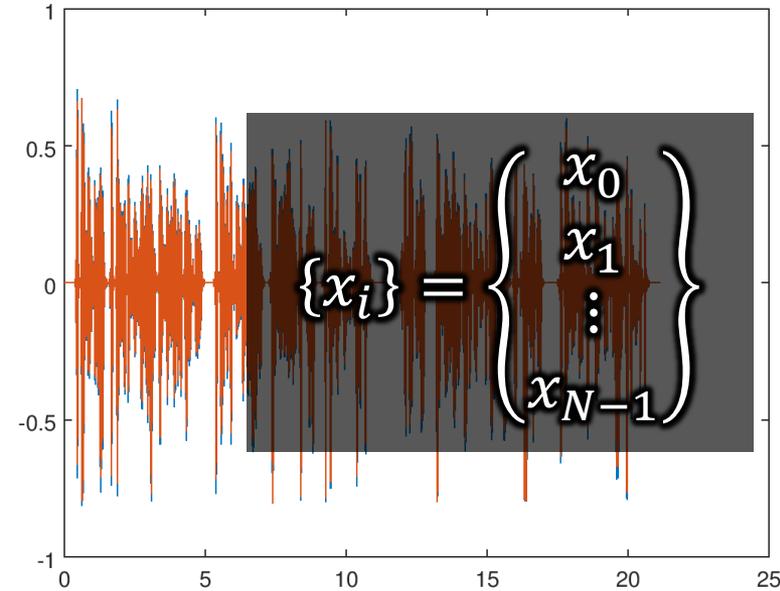
$N$ : データ点数  
 $f$ : サンプリング周波数  
 $T$ : 総時間 (=  $(N/f)$ )

$$\{t_i\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1/f \\ 2/f \\ \vdots \\ (N-1)/f \end{array} \right\}$$

という形式で表現できる。(分解できる)  
 また式をよくみると時間の要素はキャンセルでき、



# 信号は波の重ね合わせ(証明はしないけど)



$$= \begin{aligned} & \frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 0\right) \\ & + a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 1\right) \\ & + a_2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 2\right) \\ & \vdots \end{aligned} \quad \begin{aligned} & + b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 1\right) \\ & + b_2 \sin\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 2\right) \\ & \vdots \end{aligned}$$

$N$ : データ点数

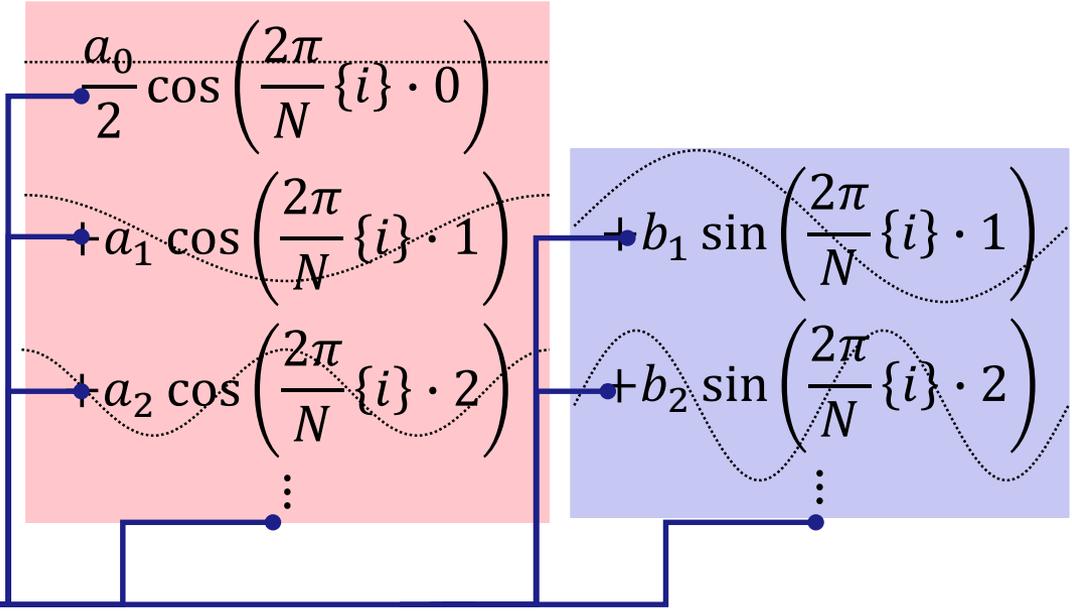
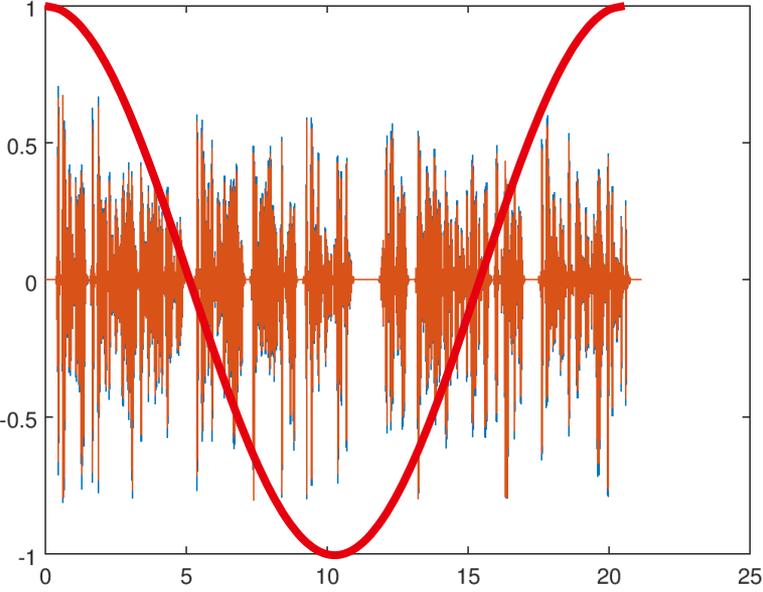
$$\{i\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ (N-1) \end{Bmatrix}$$

という表現できる.

あとは係数  $a_i b_i$  が分かれば分解完了



# 内積を取る ▶ 成分の抽出



たとえば

## ▶ 内積を計算

$$\cos\left(\frac{2\pi}{N}\{i\} \cdot 1\right)$$

がどのくらい入っているかを調べたい

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

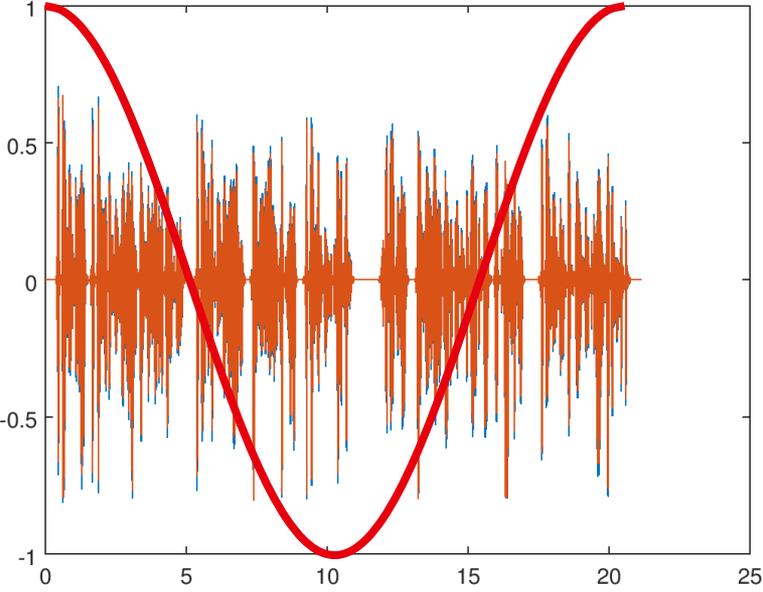
$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

中身が一致しない場合は波のまま ▶ 総和を取れば0



# 内積を取る ▶ 成分の抽出し



$$\frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 0\right)$$

$$+ a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 1\right)$$

$$- a_2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 2\right)$$

$$\vdots$$

$$+ b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 1\right)$$

$$+ b_2 \sin\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 2\right)$$

$$\vdots$$

▶ 内積を計算

$$\frac{N}{2} a_1$$

が残る.

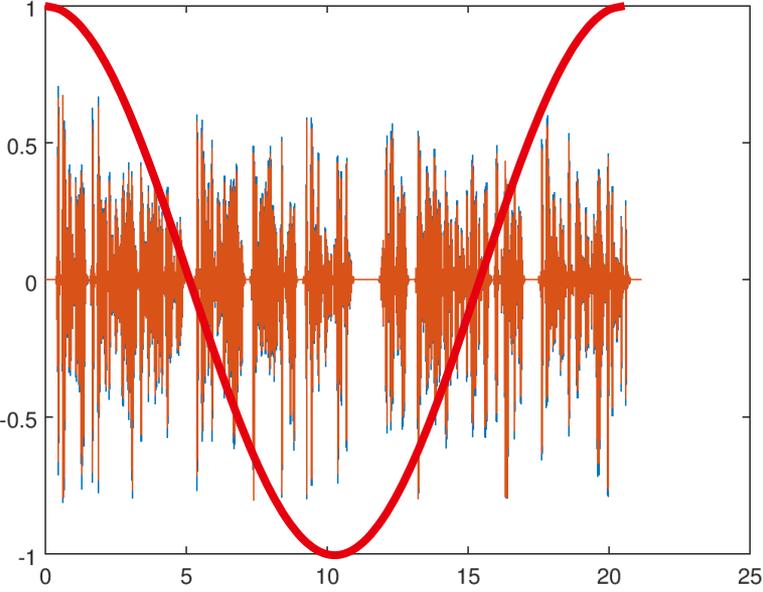
たとえば

$$\cos\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 1\right)$$

がどのくらい入っているかを調べたい



# 内積を取る ▶ 成分の抽出し



もともと、この総和は

$$\{x_i\} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{Bmatrix}$$

なので、これとの内積でも

たとえば

## ▶ 内積を計算

$$\cos\left(\frac{2\pi}{N}\{i\} \cdot 1\right)$$

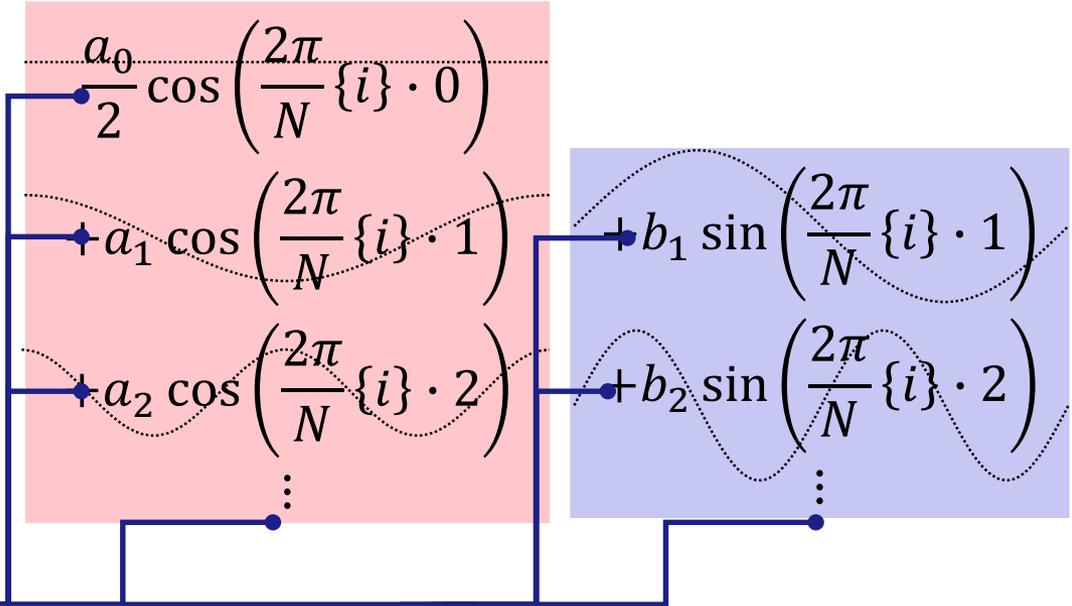
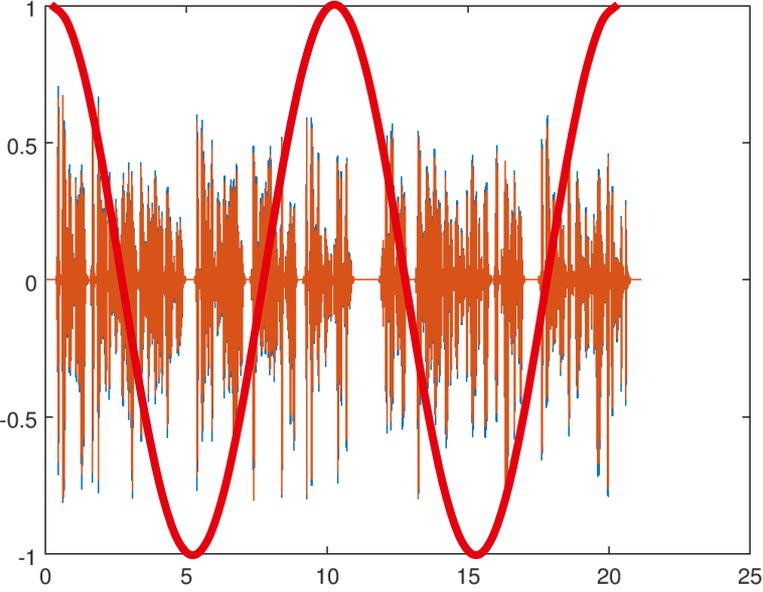
がどのくらい入っているかを調べたい

$$\frac{N}{2} a_1$$

が残る.



# 内積を取る ▶ 成分の抽出



たとえば

## ▶ 内積を計算

$$\cos\left(\frac{2\pi}{N}\{i\} \cdot 2\right)$$

がどのくらい入っているかを調べたい

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

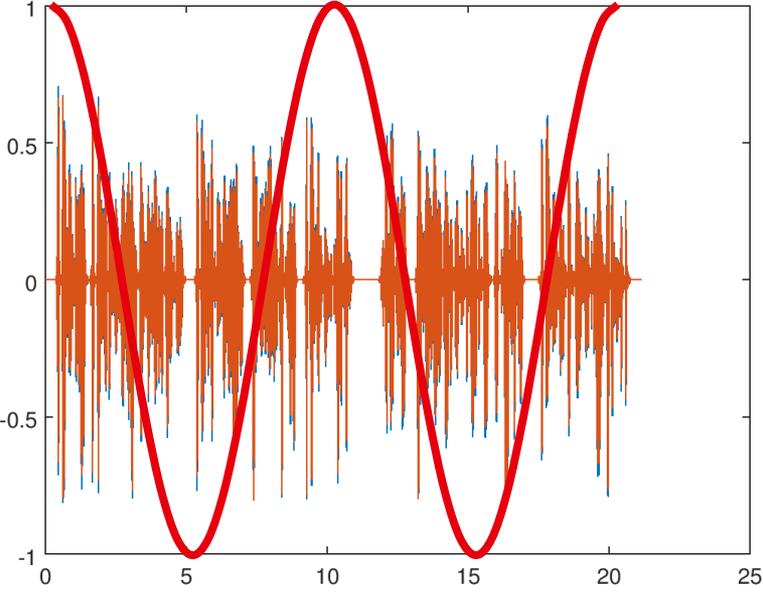
$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

中身が一致しない場合は波のまま ▶ 総和を取れば0



# 内積を取る ▶ 成分の抽出し



$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 0\right) \\ & - a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 1\right) \\ & + a_2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 2\right) \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 1\right) \\ & + b_2 \sin\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 2\right) \\ & \vdots \end{aligned}$$

たとえば

$$\cos\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 2\right)$$

がどのくらい入っているかを調べたい

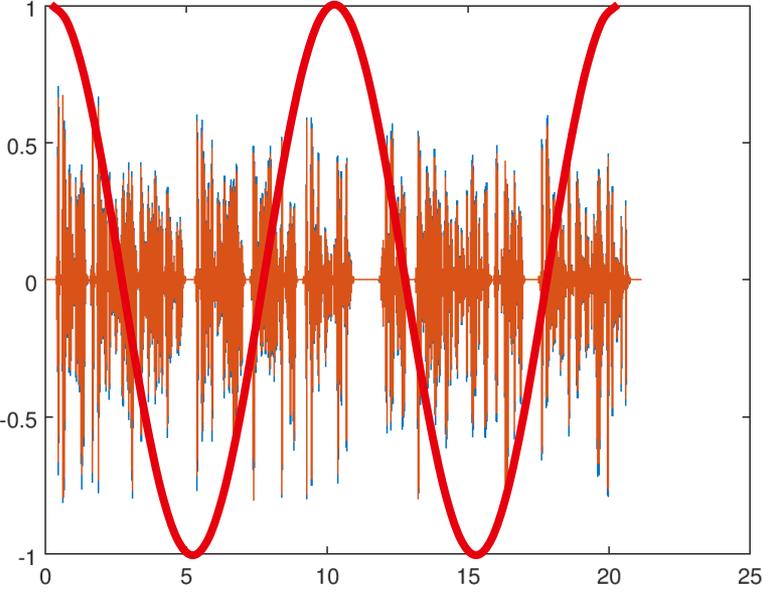
▶ 内積を計算

$$\frac{N}{2} a_2$$

が残る.



# 内積を取る ▶ 成分の抽出し



もともと、この総和は

$$\{x_i\} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{Bmatrix}$$

なので、これとの内積でも

たとえば

## ▶ 内積を計算

$$\cos\left(\frac{2\pi}{N}\{i\} \cdot 2\right)$$

がどのくらい入っているかを調べたい

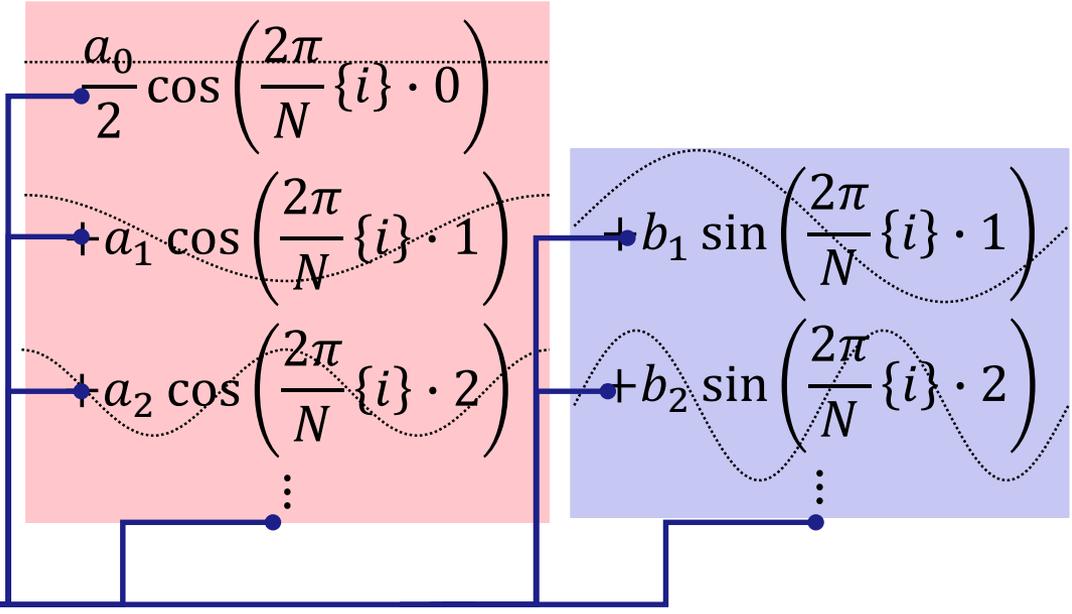
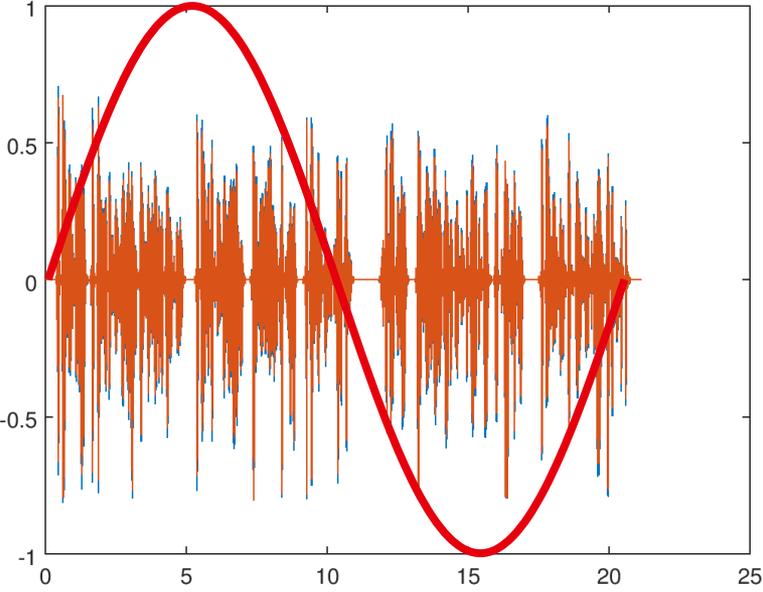
$$\frac{N}{2} a_2$$

が残る.

2倍波の内積でも対応する部分のみ残る



# 内積を取る ▶ 成分の抽出し



たとえば

$$\sin\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 1\right)$$

がどのくらい入っているかを調べたい

## ▶ 内積を計算

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

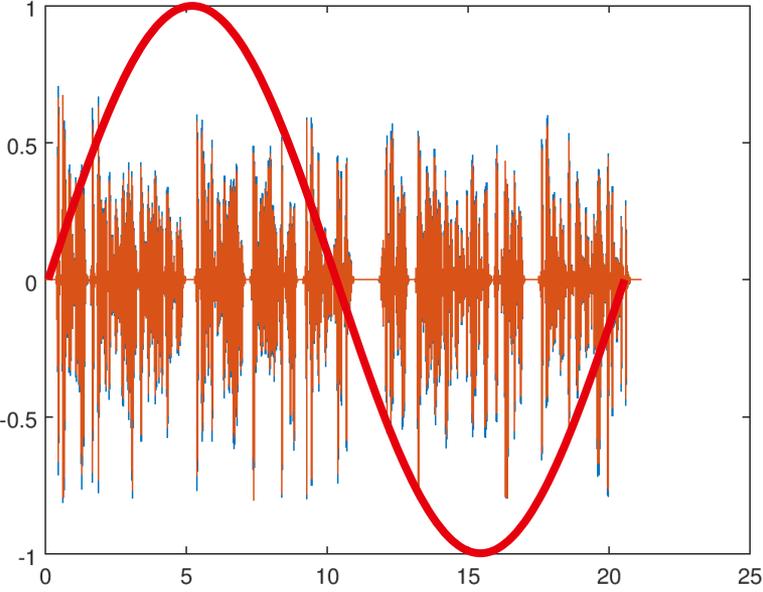
$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

中身が一致しない場合は波のまま ▶ 総和を取れば0



# 内積を取る ▶ 成分の抽出し



$$\frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 0\right)$$

$$-a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 1\right)$$

$$-a_2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 2\right)$$

$$\vdots$$

$$+b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 1\right)$$

$$+b_2 \sin\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 2\right)$$

$$\vdots$$

たとえば

**▶ 内積を計算**

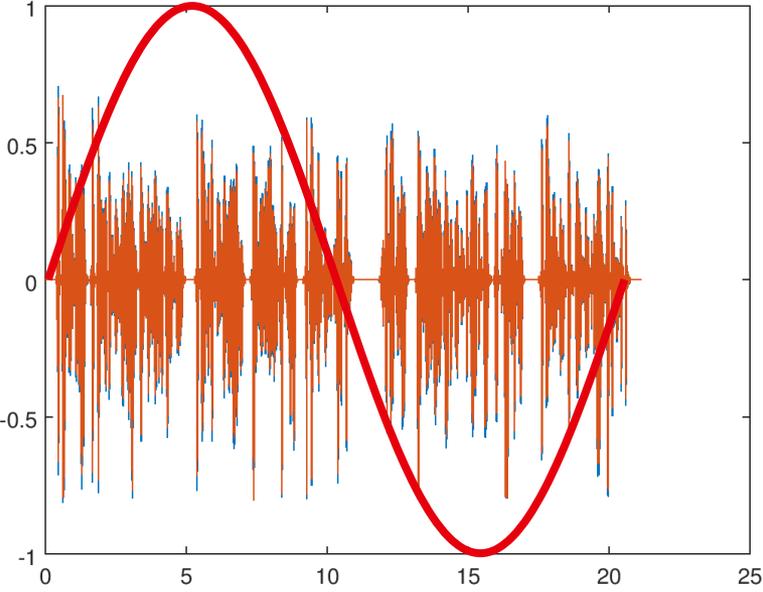
$\sin\left(\frac{2\pi}{N} \{i\} \cdot 1\right)$

がどのくらい入っているかを調べたい

$\frac{N}{2} b_1$  が残る.



# 内積を取る ▶ 成分の抽出し



もともと、この総和は

$$\{x_i\} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{Bmatrix}$$

なので、これとの内積でも

たとえば

**▶ 内積を計算**

$$\sin\left(\frac{2\pi}{N}\{i\} \cdot 1\right)$$

がどのくらい入っているかを調べたい

$$\frac{N}{2} b_1$$

が残る.

sin と cos についても一致した場合のみ残る



# 総当たりで内積を取る ▶ 分解できる

※Nは偶数とする.

$$\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{N} \{i\}^T \cdot 0\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{N} \{i\}^T \cdot 1\right) \\ \vdots \\ \cos\left(\frac{2\pi}{N} \{i\}^T \cdot \left(\frac{N}{2}\right)\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{N} \{i\}^T \cdot 1\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{2\pi}{N} \{i\}^T \cdot \left(\frac{N}{2} - 1\right)\right) \end{bmatrix}$$

$\{x_i\}$   
計測  
データ

$$= \frac{N}{2} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{\frac{N}{2}} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{\frac{N}{2}-1} \end{Bmatrix}$$

ほしい値

自分で用意するので既知情報



# 総当たりで内積を取る ▶ 分解できる

ただし、通常はデータの扱いの都合で複素数を用いる。

$$\begin{bmatrix} \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}\{i\}^T \cdot 0\right) \\ \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}\{i\}^T \cdot 1\right) \\ \vdots \\ \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}\{i\}^T \cdot (N-1)\right) \end{bmatrix} \begin{matrix} \{x_i\} \\ \text{計測} \\ \text{データ} \end{matrix} = \frac{N}{2} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{matrix} \right\} \\ \text{ほしい値} \end{matrix}$$

ここで  $i$  (立体) は虚数単位,  $\{i\}$  はゼロからの整数列であることに注意。  
内積は共役転置して掛合せるため符号が反転している。

$$\begin{bmatrix} \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}\{i\}\{i\}^T\right) \end{bmatrix} \{x_i\} = \frac{N}{2} \{c_i\}$$



# 高速フーリエ変換(FFT)



# 離散フーリエ変換は原理上できるが...

## プログラムで書くと

```
>> U = exp(i*2*pi*[0:N-1]'*[0:N-1]/N);  
>> X = U'*x;
```

となるのだが、おそらく通常のPCでは  $U$  のサイズ  
 $211289 \times 211289 \approx 446$  億  
には対応できない。

そこで高効率に離散フーリエ変換を計算する

## 高速フーリエ変換 (FFT)

を用いる



# 高速フーリエ変換

## ▶ 高速フーリエ変換: `fft`

```
>> X = fft(x); ◀ 今回はFFT後の値を大文字変数に入れる
```

### FFT後の 各要素

```
>> size(X)
ans =
    211289     1 ◀ 変換前と同じ要素数
>> X(50000) ◀ 例えば50000番のデータは
ans = -5.5782 + 3.2176i ◀ cos成分とsin成分(強度と位相に関係)
```

### DFTとの 比較

```
>> exp(-i*2*pi*(50000-1)/N*[0:211288])*x
ans = -5.5782 + 3.2176i
```

### 対称 位置の データ

```
>> X(N-(50000-1)+1)
ans = -5.5782 - 3.2176i ◀ 虚部(sin成分)のみ反転
```



# 高速フーリエ変換について簡略化すると...

対称性を利用して効率的に係数を計算する方法である

$$W_N = \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}\right) \text{ として, } N=8 \text{ の場合を例として考える}$$

▲以下, 下付き8を省略

$$\begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^{18} & W^{21} \\ W^0 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} & W^{20} & W^{24} & W^{28} \\ W^0 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^{20} & W^{25} & W^{30} & W^{35} \\ W^0 & W^6 & W^{12} & W^{18} & W^{24} & W^{30} & W^{36} & W^{42} \\ W^0 & W^7 & W^{14} & W^{21} & W^{28} & W^{35} & W^{42} & W^{49} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix}$$

8回の掛け算  
× 8行

この行列を分解すると...



# 高速フーリエ変換

$$\begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -W^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -W^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & I_2 & W^2 I_2 \\ I_2 & -I_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & I_2 & -W^2 I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix}$$

2回の掛け算  
× 8行

2回の掛け算  
× 8行

2回の掛け算  
× 8行

変形は各自追って

8 × 8 = 64 回 ▶ 3 × 2 × 8 = 48 回に減少



# 高速フーリエ変換

一般に,

$2^n \times 2^n$  行列

分解

$n$  個の  $2^n \times 2^n$  行列

(ざっくりした)

掛け算の回数

※厳密には1倍や-1倍,  $i$ 倍は計算負荷が軽いのだが概算で

$2^n$  回  $\times$   $2^n$  行

$n$  個の行列  $\times$  2回  $\times$   $2^n$  行

計算量

$O(N^2) \blacktriangleright O(N \log N)$  に減小!!

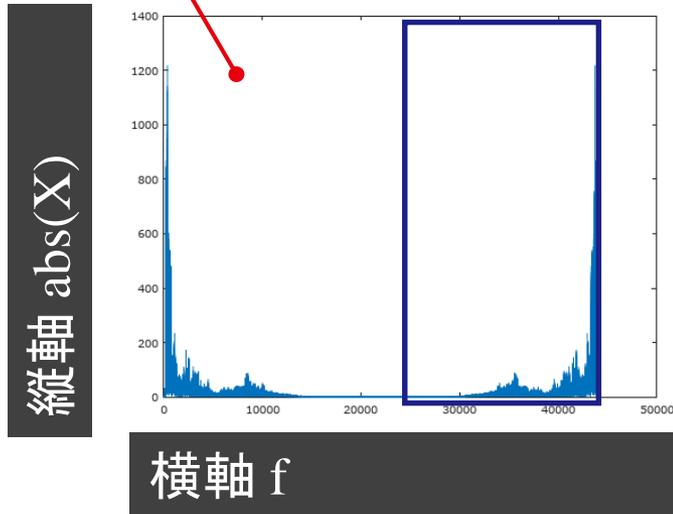
例えば1024個のデータなら, 100万回程度の計算を, 1万回以下にする



# FFT後の横軸(周波数軸)とFFTシフト

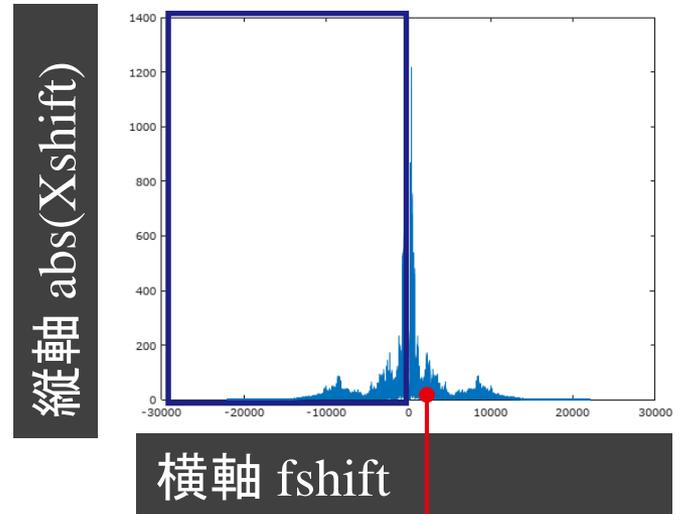
```
>> f=linspace(0,freq-freq/N,N);
>> plot(f,abs(X))
```

複素数の絶対値 (**Absolute value**)  
ちなみに偏角は `arg`



`fftshift`

中心で切り取って  
平行移動



▶ データを軸対称にする: `fftshift`

```
>> Xshift=fftshift(X);
>> fshift=f-(floor(N/2))*freq/N;
>> plot(fshift,abs(Xshift))
```



# フーリエ変換のまとめ(plotやsoundを省略すると...)

```
[x, freq]=audioread('test.wav');
N=rows(x);
ttl_time=(N-1)/freq;
t=linspace(0,ttl_time,N)';
X = fft(x(:,1));
f=linspace(0,freq-freq/N,N)';
Xshift=fftshift(X);
fshift=f-(floor(N/2))*freq/N;
```

- ◀ データ読み込み
- ◀ データ点数
- ◀ 総時間の計算
- ◀ 時間領域での横軸生成
- ◀ FFT解析し, Xに代入
- ◀ 周波数領域での横軸
- ◀  $f = 0$  を中心にシフト(縦軸)
- ◀  $f = 0$  を中心にシフト(横軸)

	時間領域	周波数領域( $f = 0$ から始まる)	$f = 0$ を中心に移動
縦軸	x: 時間領域での信号強度	X: 周波数領域での信号強度	Xshift
横軸	t: 時間軸	f: 周波数軸	fshift

**共通情報**  
 N: サンプル数  
 freq: サンプリング周波数  
 ttl\_time: 総時間

横軸の終端に関連



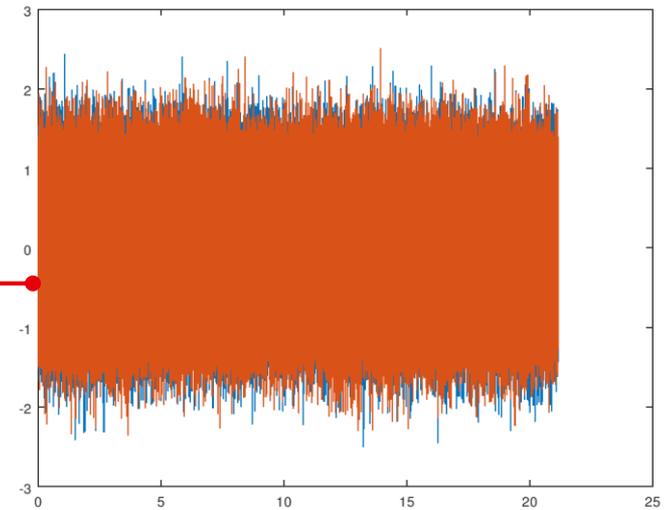
# FFTを使った応用



# ノイズ除去 (1/3)

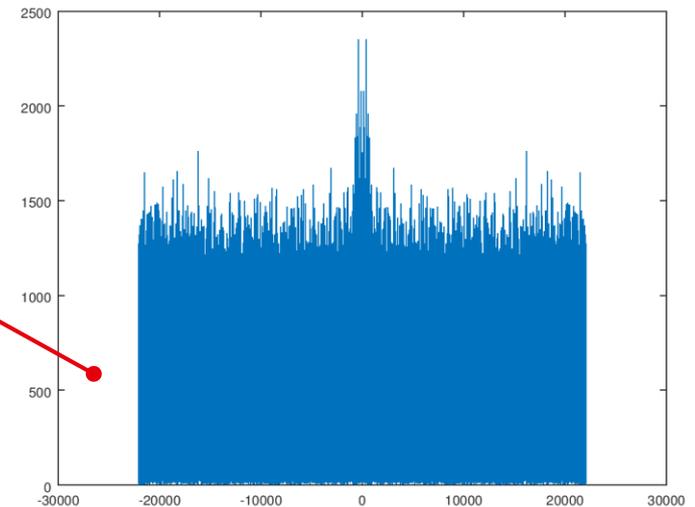
乱数列を用いてあえてノイズを入れる

```
>> x_n=x+0.5*randn(size(x));  
    ↳ ノイズ入り信号x_n: xと同サイズの乱数を作り重畳  
  
>> sound(x_n,freq);  
  
>> plot(t, x_n);
```



周波数領域で見ると,

```
>> X_n_shift=fftshift(fft(x_n));  
  
>> plot(fshift,abs(X_n_shift(:,1)))
```





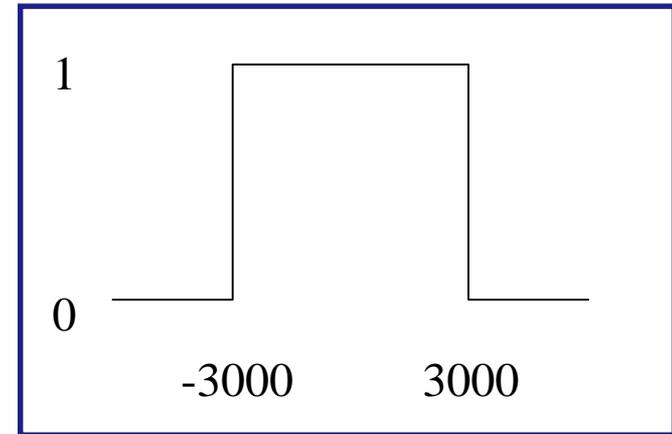
# ノイズ除去 (2/3)

高周波成分を取り除き, 逆フーリエ変換 (`ifft`) する

## ▶ フィルター変数を作る

```
>> filt = abs(fshift) < 3000;
```

不等式も「要素ごと計算」をする。  
条件が真なら1, 偽なら0を返す。



fshift	fshift<3000
~~~~~	~~~~~
2.9991e+003	1
2.9993e+003	1
2.9995e+003	1
2.9997e+003	1
2.9999e+003	1
3.0001e+003	0
3.0003e+003	0
~~~~~	~~~~~

※教科書のfilterも変数として使っているが,  
同名の関数があるので, 混同を避けるため名前を変えている。  
Octaveでは予約語にも代入「できてしまう」ので, 予期せぬトラブルを生じることがある。



## ▶ 逆FFT: `ifft`

```
>> x_n_filt = ifft(ifftshift(X_n_shift.*filt));
```

「要素ごと積」により, 3000 Hz外の値は0に

▶ `fftshift`のシフトを元に戻す.

```
>> sound(x_n_filt, freq)
```

フィルター後の音声を聞いてみよう



# ノイズ除去のまとめ

```
x_n=x+0.5*randn(size(x));  
X_n_shift=fftshift(fft(x_n));  
filt = abs(fshift) < 3000;  
x_n_filt = ifft(ifftshift(X_n_shift.*filt'));
```

時間領域

縦軸  
横軸

x: 時間領域での信号強度  
t: 時間軸

x\_n: xにノイズを付加

x\_n\_filt: filter後の信号

FFT

周波数領域

X\_n\_shift: x\_nのFFT(さらにshift)

filter:  
3000 Hz 以内は1,  
それ以外は0  
という変数

IFFT



# 課題 7

1. test.wav をFFTにより周波数分解し, 元の信号(時間-強度)と分解後の信号(周波数-強度)のグラフを並べて表示せよ.
2. 1.で分解した信号について, 「強度の高い」信号(閾値は, 最強の信号の1/100まで, 上位1000番まで, など任意に設定し, コメントアウトに記入すること)を残して強度の低い信号をカットし, 逆FFTによって音声を復元せよ.(信号の圧縮)
3. test\_w\_noise.wavファイルはtest.wavに「ある周波数の純音」をノイズとして重畳して作成したファイルである. このtest\_w\_noise.wavからノイズを取り除くプログラムを作成せよ.(完全には無理なのでできる限り.)



# ヒントと提出について

グラフを二つ以上書く場合には

```
subplot(i, j, k)
```

というコマンドが使える。

▲ ▲ ▲  
行 列 インデックス

例

```
subplot(1, 2, 1); plot(~~~  
subplot(1, 2, 2); plot(~~~
```

1行2列で図を貼る。

Index 1  
の図

Index 2  
の図

- ▶ 提出するファイルはtest.wavが作業ディレクトリに存在することを前提として作成しtest.wavを添付しないように。