6. 数値積分と常微分方程式

- 数値積分 (定積分)
- 二重積分
- 常微分方程式(ordinary differential equation：ODE)の初期値問題

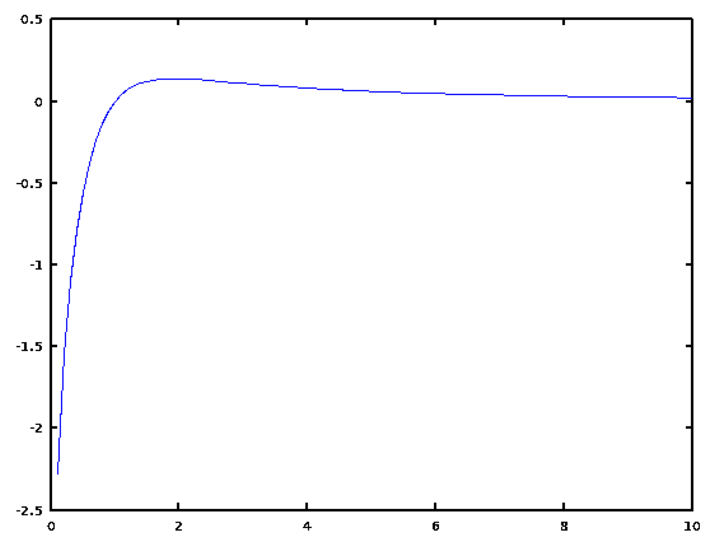
数値積分

- 与えられる関数の定積分を(解析的にではなく)数値的に求めること。
- Octave では “quad”を用いて定積分を数値的に求めることが可能。
- 例:　右式の定積分を求める。 $$\int_0^{10} \frac{\log x}{1+x^2} dx$$

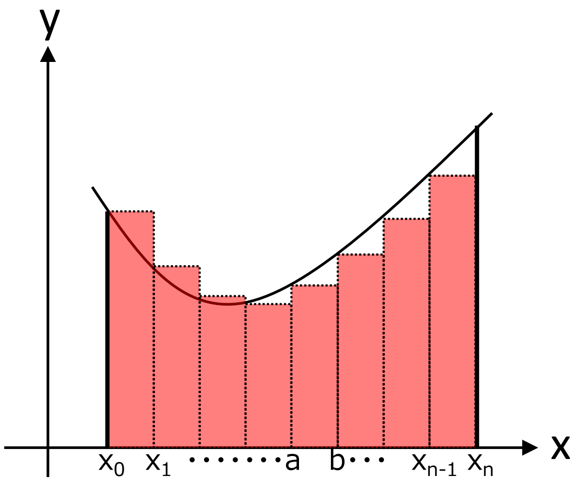
```
>> quad(@(x)(log(x)/(1+x^2)), 0, 10)
ans = -0.32938
```

- 元の関数を以下のコマンドでプロット可能

```
>> x=0:0.1:10;
>> plot(x, log(x)./(1+x.^2)))
```



求積法

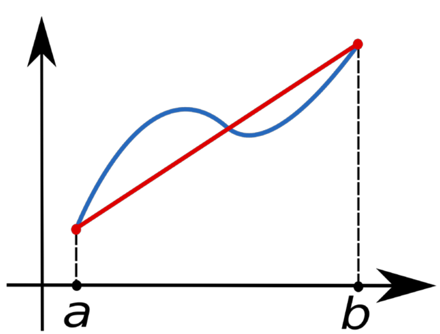


$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \underline{\int_a^b f(x)dx} + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

- 定積分は近似的に数値計算する手法が提案されている。
  例：台形近似、シンプソン法

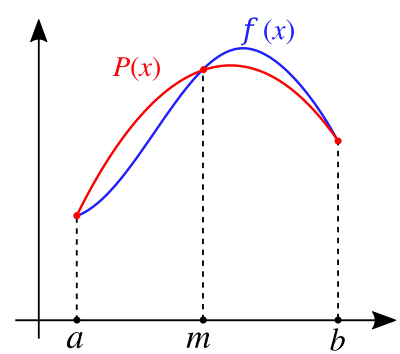
■台形近似(1次近似)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$



■シンプソン法(二次近似)

$$\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$



余談

- シンボルを使って先ほどの関数の不定積分を求めてみると・・・。

$$\boxed{\frac{\log x}{1+x^2}}$$

```
>> int(log(x)/(1+x^2))
ans = (sym)

    /
   |
   |  log(x)
   |  ------ dx
   |   2
   |  x  + 1
   |
  /
```

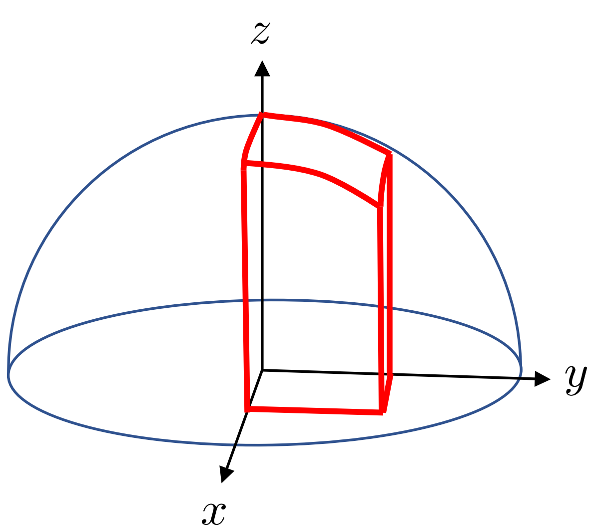
二重積分

- “dblquad” を用いることで二重積分を求めることができる。
- 例： To calculate the volume of a part of the hemisphere of a unit sphere

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

```
>> dblquad(@(x,y)(sqrt(1-x.^2-y.^2)),0,0.5,0,0.5)
ans =  0.22774
```



常微分方程式(ODE)の初期値問題 (初期値が与えられた微分方程式を解く)

- 微分方程式の例

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

- 解答例

$$\int \frac{d^2y}{dt^2}\ dt = \int -g\ dt$$

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1$$

$$\int \frac{dy}{dt}\ dt = \int (-gt + C_1)\ dt$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$$

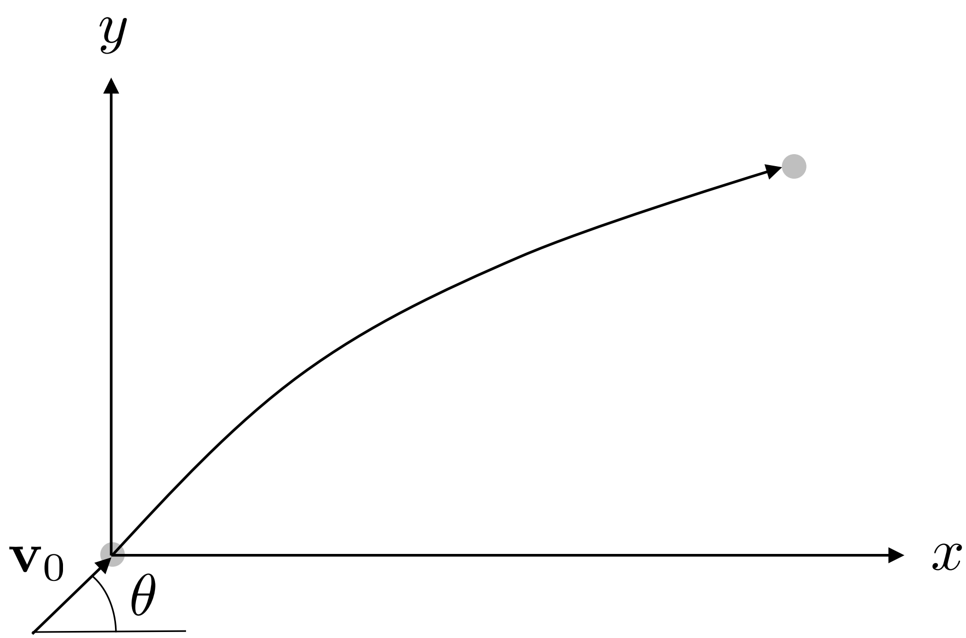
- OctaveにおけるODEの初期値問題を解くステップ
  1. ターゲットとなるシステムを記述する微分方程式を導く
  2. ２階以上の微分方程式の場合、新しい変数などを用いて１階の微分方程式に落とし込む
  3. ステップ2で作成した微分方程式を構成する導関数をスクリプトファイルで作成する。
  4. “ode45”を用いて微分方程式を解く。その際に、各変数の初期値と微分する変数のインターバルを設定する。

微分方程式の例

- 質量 m [kg]の金属球が角度θ [rad]で打ち上げられたと仮定する。初速度はv_0 [m/s]である。
- 上記動作を示す方程式は位置 (*x*,*y*)を用いて次の様に記述できる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$ （一定速度）

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$ （重力加速度）



解き方(1/2)

- X方向、y方向のボールの速度をそれぞれv_x,v_y と置く。
- 前ページの微分方程式を *x*, *y*, v_x, v_yを用いて１階の微分方程式に変換する。

$$\frac{dx}{dt} = v_x \qquad \frac{dy}{dt} = v_y \qquad \frac{dv_x}{dt} = 0 \qquad \frac{dv_y}{dt} = -g$$

- スクリプト上でそれぞれの関数を作成する。
  - **p** を時間*t*の関数である4つの要素 *x*, *y*, v_x, v_y で構成する。

$$\mathbf{p} = (x, y, v_x, v_y)$$

  - **p**を*t*で微分した関数である*d***p**/*dt*をスクリプト上に記述する。

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}\right)$$

```
function dp = deriv_fun(t, p)
g = 9.81;
dp = [p(3), p(4), 0, -g];
endfunction
```

pの3列目

解き方(2/2)

- “ode45” を用い、時間間隔と初期値を設定して微分方程式を解く。

$\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos\theta, v_0 \sin\theta)$

スクリプトで定義した関数

時間間隔
Time interval

t=0における
x, y, v_x, v_y の値(初期値)

```
>> pkg load odepkg
>> [T, result] = ode45(@deriv_fun, [0,0.5], [0,0,4.0,2.0])
```

- 実際のスクリプトの例

```
#deriv_fun.m
#初めにパッケージを読み込む
pkg load odepkg

#関数定義
function dp = deriv_fun(t,p)
  g = 9.81;
  dp = [p(3), p(4), 0, -g];
endfunction

#微分方程式を数値的に解く
[T, result] = ode45(@deriv_fun, [0,0.5], [0,0,4.0,2.0])
```

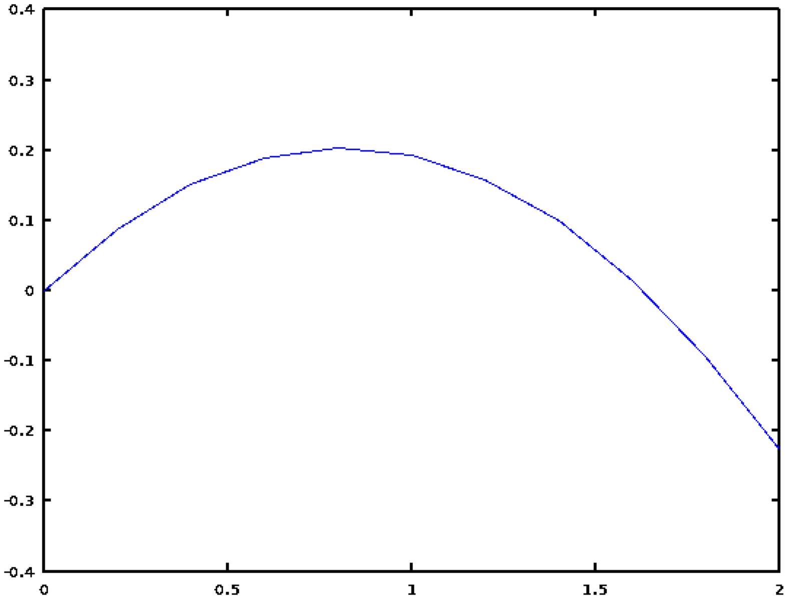
結果

Results:

```
warning: Option "RelTol" not set, new value 0.000001 is used
warning: called from    ode45 at line 113 column 5
warning: Option "AbsTol" not set, new value 0.000001 is used
warning: Option "InitialStep" not set, new value 0.050000 is used
warning: Option "MaxStep" not set, new value 0.050000 is used
T =
   0.00000
   0.05000
   0.10000
   0.15000
   0.20000
   0.25000
   0.30000
   0.35000
   0.40000
   0.45000
   0.50000
   0.50000
result =
   0.00000   0.00000   4.00000   2.00000
   0.20000   0.08774   4.00000   1.50950
   0.40000   0.15095   4.00000   1.01900
   0.60000   0.18964   4.00000   0.52850
   0.80000   0.20380   4.00000   0.03800
   1.00000   0.19344   4.00000  -0.45250
   1.20000   0.15855   4.00000  -0.94300
   1.40000   0.09914   4.00000  -1.43350
   1.60000   0.01520   4.00000  -1.92400
   1.80000  -0.09326   4.00000  -2.41450
   2.00000  -0.22625   4.00000  -2.90500
   2.00000  -0.22625   4.00000  -2.90500
```

Plot of a trajectory of the metal ball

```
>> plot(result(:,1), result(:,2))
```

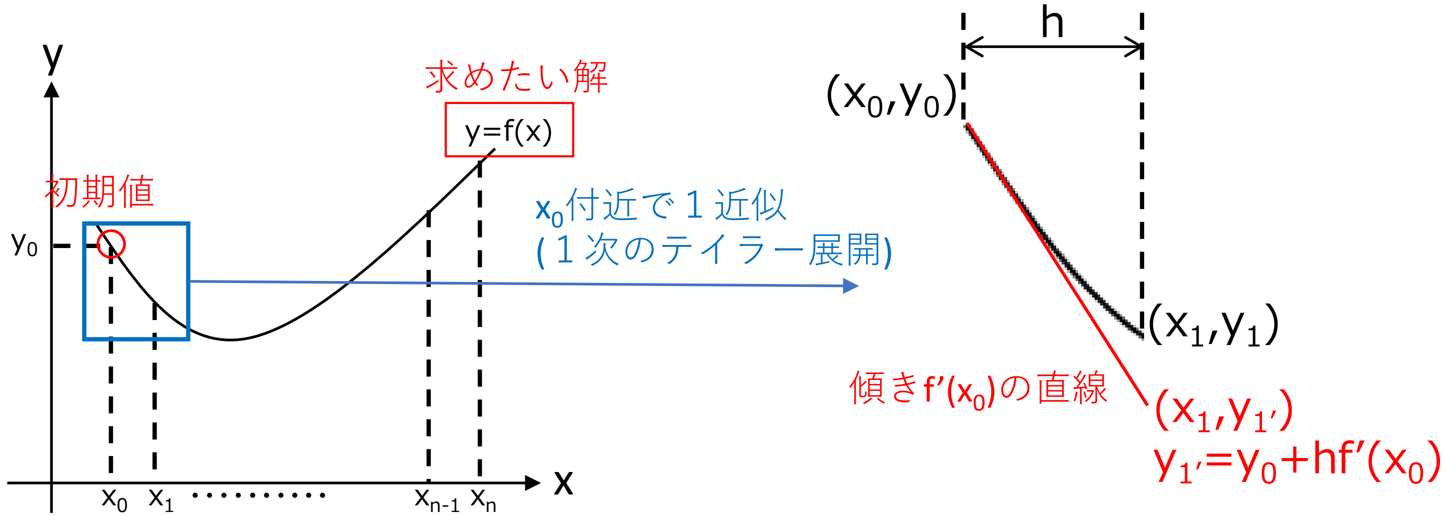


ルンゲ・クッタ法

解きたい方程式

$$\frac{dy}{dt} = F(x)$$

$(F(x)=f'(x))$



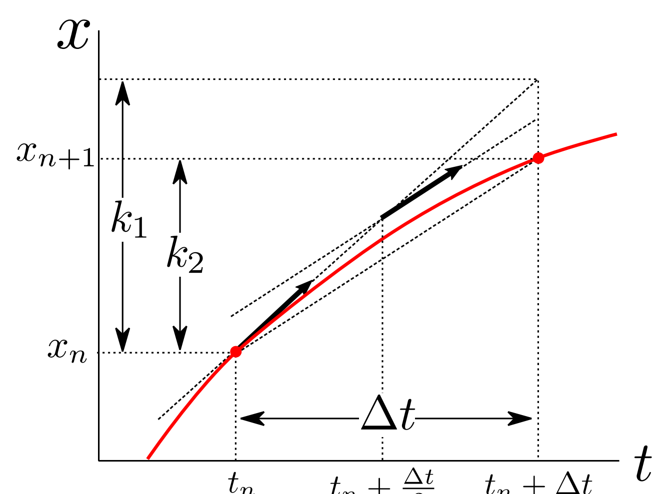
hが十分に小さければ求めたい曲線は赤の直線に近似できる。
つまり、$y_1 \fallingdotseq y_{1'}$として$y_1$を求めることができる。
これを繰り返せば$y_2, y_3, \ldots, y_n$を求めることが出来る。
さらに１次近似でなく、２次、３次近似とすることで誤差を小さくできる。

- The core of numerical solutoins to ODEs is numerical integration
  - 2nd order Runge-Kutta method

$$k_1 = \Delta t\, f(t_n, x_n)$$

$$k_2 = \Delta t\, f(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, x_n + \frac{1}{2}k_1)$$

$$x_{n+1} = x_n + k_2 (+O(\Delta t^3))$$



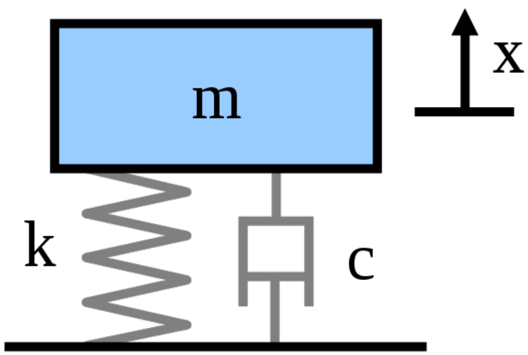
Exercise 6.1

次の図のようにばね定数kのばねと減衰定数cのダンパーが並列につながった質量mの物体を考える。物体は図のx方向にのみ動くと仮定する。このとき、物体の動きは次の方程式でつり合いの式で表される。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

減衰定数cを「誕生月を3で割った余りに1を足した値」、ばね定数kを「誕生日を7で割った余りに1を足した値」としたとき、*m=1, x(0)=1, dx/dt(0)=0*の初期値の下で、横軸時間ｔ、縦軸を物体の位置*x*として*x(t)*をプロットせよ。

例；もし、誕生日が8月13日であれば減衰定数cは”3”、ばね定数kは”7”である。



提出先：

原則としてISTU上で提出

ISTU上で提出出来ない場合は
以下のアドレスに提出

Email：hisashi.kino.a1@tohoku.ac.jp (木野)
Email：keita.shimada.c6@tohoku.ac.jp (嶋田)
〆切：2019年7月8日8:49AM