6. 数値積分と常微分方程式

・数値積分（定積分）
・２重積分
・常微分方程式の初期値問題

数値積分

- quadコマンドを用いると定積分の値が計算できる
- 例えば以下のような定積分を計算したい場合は

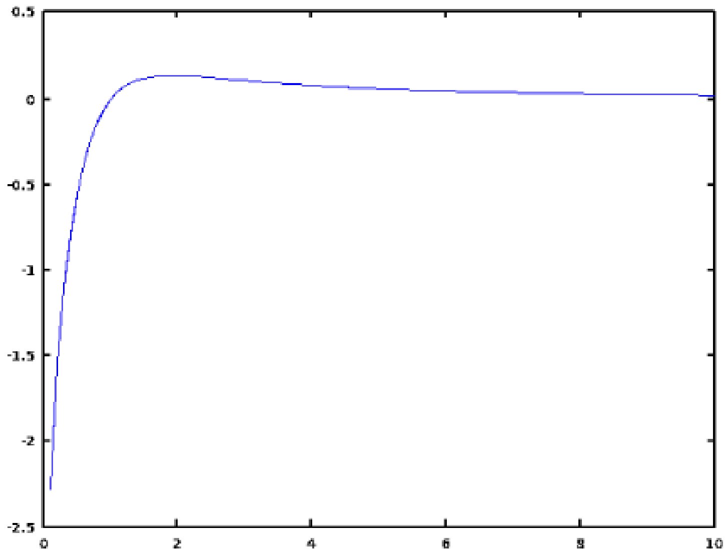
$$\int_0^{10} \frac{\log x}{1+x^2} dx$$

```
>> quad(@(x)(log(x)/(1+x^2)), 0, 10)
ans = -0.32938
```

- 被積分関数の形をプロットするには

```
>> x=0:0.1:10;
>> plot(x, log(x)./(1+x.^2)))
```

行列やベクトルを‘要素ごと’に取り扱うには演算子の前にドットを付ける



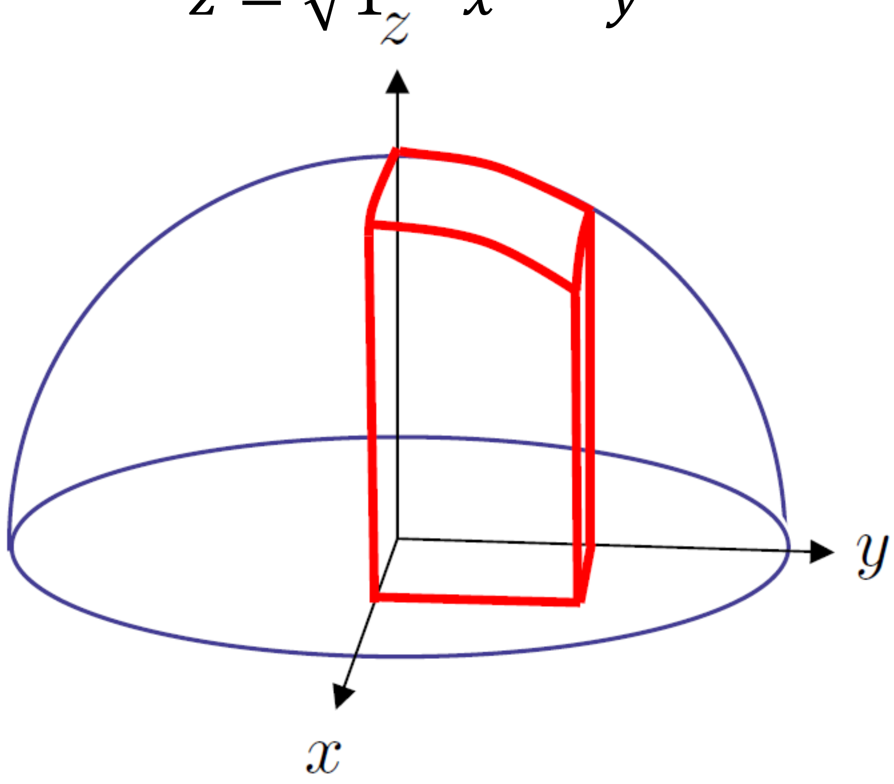
2重積分

・dblquadコマンドを用いると定積分の値が計算できる

例：中心からの距離が１の半球の赤部分の体積を計算する

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$



$$\iint \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

$$0 \leq x \leq 0.5 \quad 0 \leq y \leq 0.5$$

```
>> dblquad(@(x,y)(sqrt(1-x.^2-y.^2)),0,0.5,0,0.5)

ans =  0.22774
```

常微分方程式の数値解法

1. 対象となるシステムの微分方程式を立てる
2. もし2階またはそれ以上の高次の微分方程式になった場合は、新しい変数を導入して1階の微分方程式に書き直す
3. ある時間とそのときの変数の値から，各変数の微分値を計算する関数を用意する
4. 関数ode45を用いて初期値と計算する時間間隔を与えて、それぞれの変数の時間変化を計算する

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

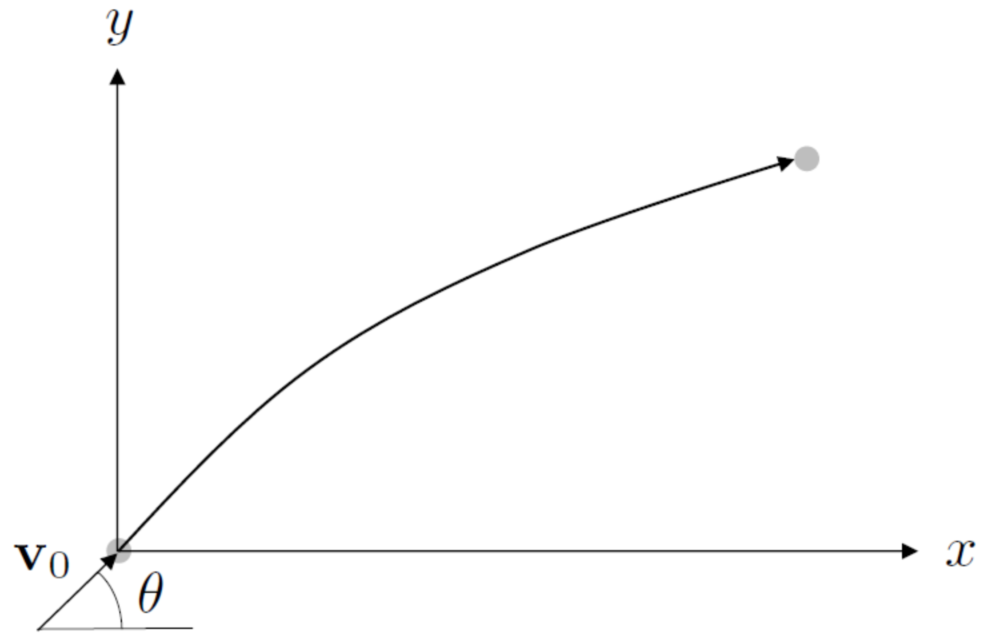
例：初速度v0、角度θでボールを投げた後のボールの軌道

1.微分方程式を立てる

x方向 $$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

y方向 $$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

x方向は加速度 0 (等速)　　y方向は重力加速度を考慮



2. 今回は2階の微分方程式なので、新しい変数を導入して1階の微分方程式に書き直す

x方向 $$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$ y方向 $$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

新たな変数としてx方向速度をv_x，y方向速度をv_yと置く

上の微分方程式は変数x，v_x，y，v_yそれぞれの1階微分で書ける

$$\frac{dx}{dt} = v_x \qquad \frac{dy}{dt} = v_y$$

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \qquad \frac{dv_y}{dt} = -g$$

3.ある時間とそのときの変数の値から，各変数の微分値を計算する関数を用意する

・ある時刻 t における各変数をベクトル $\mathrm{p} = (x, y, v_x, v_y)$ とする

・時刻 t でのpの値を用いて微分値dp/dtを計算する関数を作る

$$\mathrm{d}p/dt = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}\right)$$
$$= (v_x, v_y, 0, -g)$$

ユーザー定義関数を使って

```
function dp=deriv_fun(t,p)
  g=9.81;
  dp=[p(3),p(4),0,-g];
endfunction
```

t:時間 p:変数ベクトル$\mathrm{p} = (x, y, v_x, v_y)$

$$p(1) = x, p(2) = y,$$
$$p(3) = v_x, p(4) = v_y$$

$\mathrm{d}p/dt = (v_x, v_y, 0, -g)$ であるから

dp=[p(3),p(4),0,-g];

4. 関数ode45を用いて初期値と計算する時間間隔を与えてそれぞれの変数の時間変化を計算する

計算するTの区間　　初期値

```
>>pkg load odepkg
>>[T,result]=ode45(@deriv_fun, [0,0.5], [0,0,4.0,2.0])
```

T:時間

result:計算結果

t=0での(x, y, v_x, v_y)

@ 前のスライドで定義した関数の名前

```
function dp=deriv_fun(t,p)
  g=9.81;
  dp=[p(3),p(4),0,-g];
endfunction
```

Results:

```
warning: Option "RelTol" not set, new value 0.000001 is used
warning: called from    ode45 at line 113 column 5
warning: Option "AbsTol" not set, new value 0.000001 is used
warning: Option "InitialStep" not set, new value 0.050000 is used
warning: Option "MaxStep" not set, new value 0.050000 is used
T =
   0.00000
   0.05000
   0.10000
   0.15000
   0.20000
   0.25000
   0.30000
   0.35000
   0.40000
   0.45000
   0.50000
   0.50000
result =
   0.00000   0.00000   4.00000   2.00000
   0.20000   0.08774   4.00000   1.50950
   0.40000   0.15095   4.00000   1.01900
   0.60000   0.18964   4.00000   0.52850
   0.80000   0.20380   4.00000   0.03800
   1.00000   0.19344   4.00000  -0.45250
   1.20000   0.15855   4.00000  -0.94300
   1.40000   0.09914   4.00000  -1.43350
   1.60000   0.01520   4.00000  -1.92400
   1.80000  -0.09326   4.00000  -2.41450
   2.00000  -0.22625   4.00000  -2.90500
   2.00000  -0.22625   4.00000  -2.90500
```

resultにp=(x,y,vx,vy)の時間変化が代入されている.

x(T) y(T) vx(T) vy(T)

x(0) y(0) vx(0) vy(0)

x(0.05) y(0.05) vx(0.05) vy(0.05)

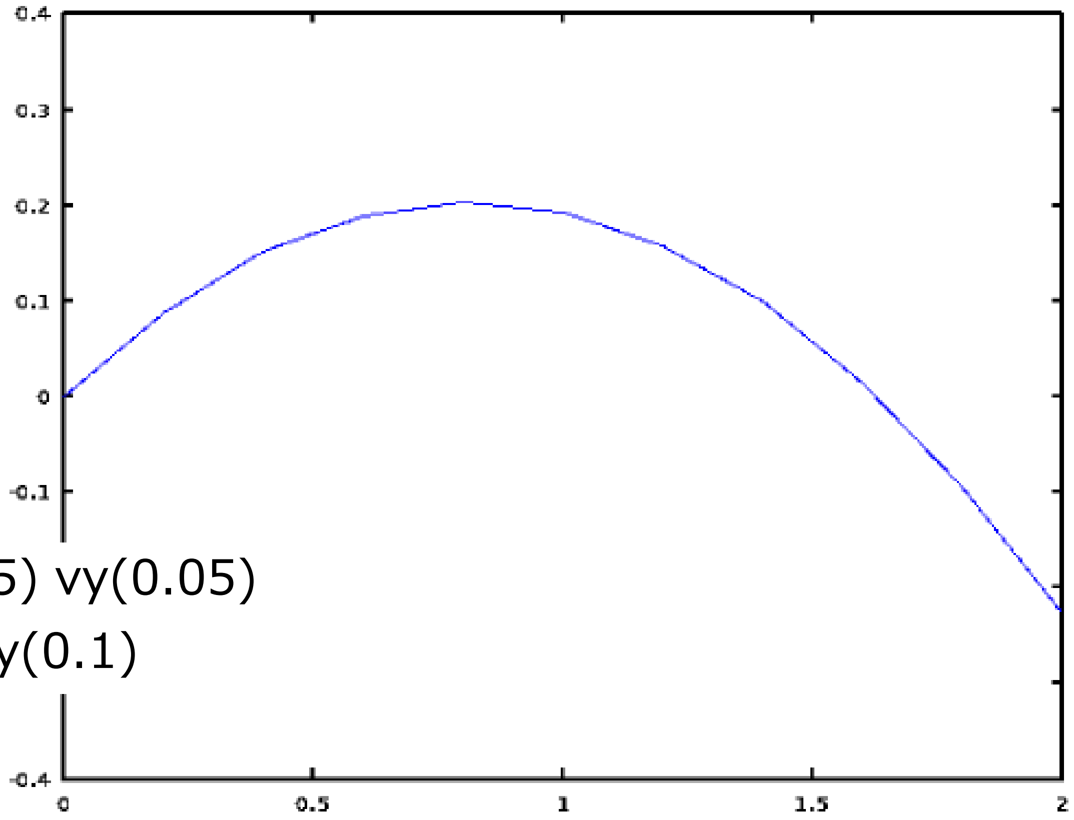
x(0.1) y(0.1) vx(0.1) vy(0.1)

・
・
・

x(0.5) y(0.5) vx(0.5) vy(0.5)

結果をグラフにプロット

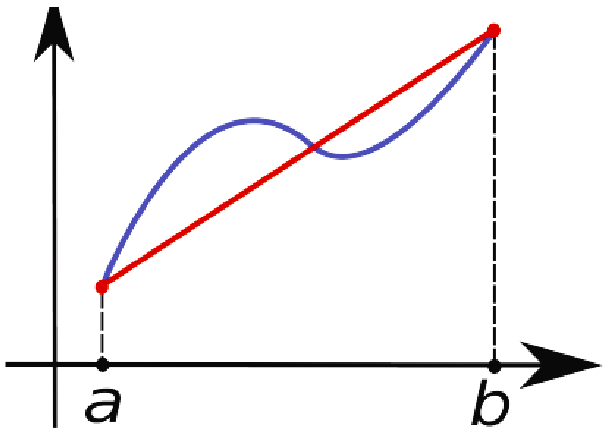
```
>> plot(result(:,1), result(:,2))
```



数値積分の原理

The trapezoidal rule

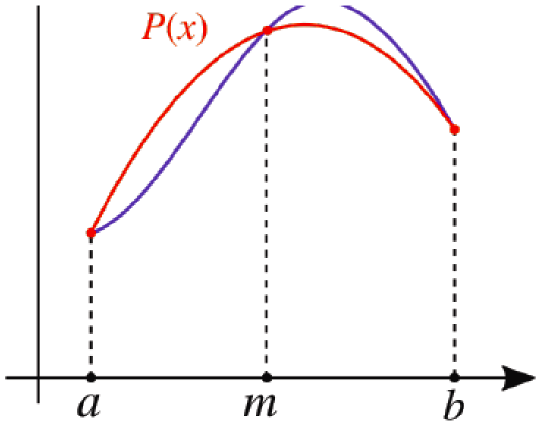
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$



積分区間の面積を台形で近似

Simpson rule

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$



積分区間の面積を2次関数で近似

微分方程式の数値解法（2次Runge-Kutta法）

微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$ について

ある時刻 t_n の時の x の値を x_n とすると，$t_{n+1} = t_n + \Delta t$ での x の値 x_{n+1} を求めるには？

時間t_nにおける傾き $f(t_n, x_n)$ を使うと

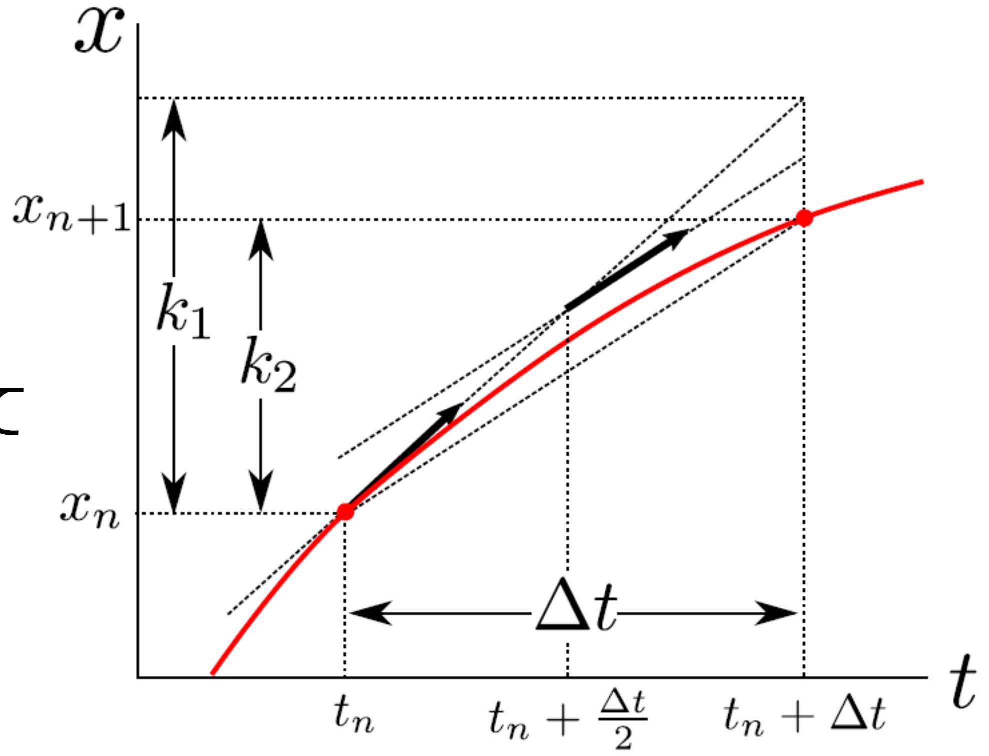
$$x_{n+1} = x_n + k_1 \quad (k_1 = \Delta t\, f(t_n, x_n))$$

と書けるが，精度は良くない.

そこで，時間 $t_n + \frac{1}{2}\Delta t$ における値を $x_n + \frac{1}{2}k_1$として傾きを再計算する.

$$k_2 = \Delta t\, f(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, x_n + \frac{1}{2}k_1)$$

$$x_{n+1} = x_n + k_2$$



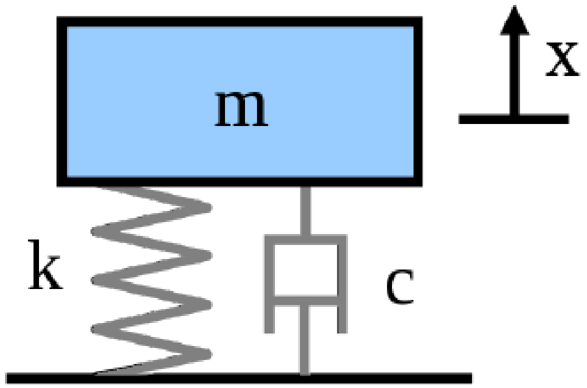
Exercise 6.1

質量m，ばね定数k，減衰定数cのばねマスダンパ系を考える．
質点がx方向にしか動かないと仮定すると，この系の運動方程式は
以下のように与えられる

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$

ここでm=1, c=自分の誕生月を3で割った余り+1
k=自分の誕生日を7で割った余り+1とし初期値はx(0)=1, dx/dt(0)=0とする．
計算結果を横軸t，縦軸xのグラフに示せ．

例：誕生日が8月13日の場合
c=3, k=7とする



$m\frac{d^2x}{dt}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$は2階の微分方程式なので、

新しい変数を導入して1階の微分方程式に書き直す必要がある.

・そこで新たな変数　速度v(=dx/dt)を導入する.

・上の式をxとvの1階微分の連立方程式に書き換えると

$$\frac{dx}{dt}=v$$

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{c}{m}v-\frac{k}{m}x$$

となる

すべての変数をベクトル　$p = (x, v)$　と置くと

その時間微分 dp/dt は

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dv}{dt}\right)$$

$$= \left(v, -\frac{c}{m}v - \frac{k}{m}x\right)$$

・dp/dtを計算するユーザー定義関数を作る

```
function dp=deriv_fun(t,p)
  m=1.0;
  c=3.0;
  k=7.0;
  dp=
endfunction
```

t:時間 p:変数ベクトルp $= (x, v)$

$$p(1) = x, \qquad p(2) = v$$

$\dfrac{dp}{dt} = \left(v, -\dfrac{c}{m}v - \dfrac{k}{m}x\right)$ であるから

どのように書けばいいだろうか？

ユーザー定義関数を作ったら
ode45を使って計算しグラフにプロットする.