3. Matrices and linear algebra Ⅰ
行列と線形代数Ⅰ

- Accessing elements　要素へのアクセス
- Basic operations　基本的な操作
- Norms　ノルム
- Inverse matrix　逆行列
- Linear equation　線型方程式

Accessing elements　要素へのアクセス

- As you have learned, ’ ; ’ indicates the end of a row; matrices of any size can be created in this way
行列の要素は‘，’で区切り，行は‘ ; ’で区切る.

```
>> A=[1,2,3;2,3,4]
A =
    1    2    3
    2    3    4
```

```
>> B=[1,2;2,3;3,4]
B =
    1    2
    2    3
    3    4
```

- Specify row and column indices to access an element
行と列を指定して各要素にアクセスする.
- A whole row or a whole column can be represented using ‘:’
行や列の全体を指定するには‘ : ’を用いる.

```
>> A(2,3)
ans =  4
>> A(1,2)
ans =  2
```

```
>> B(3,:)
ans =
    3    4
```

```
>> B(:,1)
ans =
    1
    2
    3
```

Quick creation of several matrices by functions
特殊な行列を作成する方法

- 単位行列（Identity matrix）：eye (m)
- 全要素１の行列（Matrix of all 1’s）：ones(m,n)
- 零行列（Matrix of all 0’s）：zeros(m,n)
- 乱数行列（Matrix of random numbers）：rand, randn
  - rand generates random numbers uniformly distributed in the range [0,1]
    rand　各要素が[0,1]の一様乱数を生成
  - randn generates random numbers from the normal distribution with zero mean and variance one
    randn　各要素が平均０，分散１の正規分布となる乱数を生成

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

単位行列（Identity matrix）

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

全要素１の行列（Matrix of all 1’s）

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

零行列（Matrix of all 0’s）

```
>> eye(3)
ans =
Diagonal Matrix
   1   0   0
   0   1   0
   0   0   1
>> ones(3,2)
...
>> zeros(2,10)
...
```

```
>> rand(3,2)
ans =
   0.562728   0.057675
   0.697043   0.442021
   0.839662   0.310947
>> randn(3,2)
ans =
   1.12010  -0.96770
  -1.36156  -0.45994
   0.38406   2.33878
```

Arithmetic operations on matrices (1/2) 行列演算のための算術演算子(1/2)

- 足し算 Addition(+)，引き算 subtraction(-)，転置 transpose(‘)

```
>> A+B‘
ans =
    2    4    6
    4    6    8
```

```
>> A'+B
ans =
    2    4
    4    6
    6    8
```

```
>> A+B
error: operator +: nonconformant
arguments (op1 is 2x3, op2 is
3x2)
```

行数と列数があっていないとエラーになる

- 掛け算 Mutiplication

```
>> C=A*B
ans =
    14    20
    20    29
```

```
>> D=B*A
ans =
     5     8    11
     8    13    18
    11    18    25
```

- 行列式 Determinant

```
>> det(C)
ans =   6.0000
>> det(C')
ans =   6.0000
```

```
>> det(D)
ans =     1.1102e-16
```

Arithmetic operations on matrices (2/2) 行列演算のための算術演算子(2/2)

- 要素ごとの掛け算と割り算 Element-wise product (.*) and division (./)

```
>> A.*B'
ans =
   1      4      9
   4      9     16
```

```
>> A./B'
ans =
   1      1      1
   1      1      1
```

- べき乗 Power of a square matrix (^)

```
>> (A*A')^2
ans =
   596    860
   860   1241
```

```
>> A*A'
ans =
   14   20
   20   29
```

- 要素ごとのべき乗 Element-wise power (.^)

```
>> (A*A').^2
ans =
   196    400
   400    841
```

Norm of vectors and matrices
ベクトルと行列のノルム

- Norm of a vector : norm(x,p)
  ベクトルのノルム

$$\|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{m} x_i^p} \qquad \mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_m]^\top$$

```
>> x=[1,3,2];
>> norm(x)
ans =     3.7417
>> norm(x,2)
ans =     3.7417
>> norm(x,1)
ans =      6
>> norm(x,inf)
ans =      3
```

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$$

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max(x_1, \cdots, x_m)$$

- Norm of a matrix : norm(X,p)
  行列のノルム
  - E.g.,フロベニウスノルム Frobenius norm

$$\|\mathbf{X}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2} = \sqrt{\mathrm{trace}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})}$$

関数を使用して計算する場合

```
>> X=randn(3,4);
>> norm(X,'fro')
ans =
    3,4349
```

直接計算する場合

```
>> sqrt(trace(X*X'))
ans =
    3.4349
```

Inverse matrices　逆行列

- The inverse A^{-1} of a square matrix A can be calculated by inv
  正方行列 A の逆行列 A^{-1} は inv関数 によって計算できる.

```
>> A=randn(3,3)
A =
    0.087948    1.279500    0.060176
   -1.494407   -0.188317   -0.918068
   -1.063032    1.306333    0.734150
>> B=inv(A)
B =
    0.4055585   -0.3289932   -0.4446546
    0.7923708    0.0491297   -0.0035107
   -0.8226907   -0.5637950    0.7245167
>> B*A
ans =
    1.00000    0.00000   -0.00000
   -0.00000    1.00000    0.00000
    0.00000   -0.00000    1.00000
>> A*B
ans =
    1.00000    0.00000    0.00000
    0.00000    1.00000    0.00000
   -0.00000    0.00000    1.00000
```

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Linear equations　線型方程式

- Use operator '¥' (Gaussian elimination) or inversion inv
  演算子 ¥（ガウスの消去法）または inv を使用して逆行列を用いる

```
>> A=[2,2,1;3,-1,3;2,-1,-3]
A =
    2    2    1
    3   -1    3
    2   -1   -3
>> b=[0;3;-1]
b =
    0
    3
   -1
>> A¥b
ans =
    0.19512
   -0.51220
    0.63415
>> inv(A)*b
ans =
    0.19512
   -0.51220
    0.63415
```

Remark: In general, inverse matrices should not be used for solving linear equations, particularly very large ones, from the perspective of computational efficiency and numerical accuracy
注意：一般に，計算効率と数値精度の観点から，逆行列は線形方程式（特に非常に大きなもの）を解くためには使用されるべきではありません．

連立方程式
（A simultaneous equation）：

$$2x + 2y + z = 0$$

$$3x - y + 3z = 3$$

$$2x - y - 3z = -1$$

ベクトル – 行列による記述
（Its vector-matrix notation）：

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

解（The solution）：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.19512 \\ -0.51220 \\ 0.63415 \end{bmatrix}$$

Gaussian elimination*　ガウスの消去法

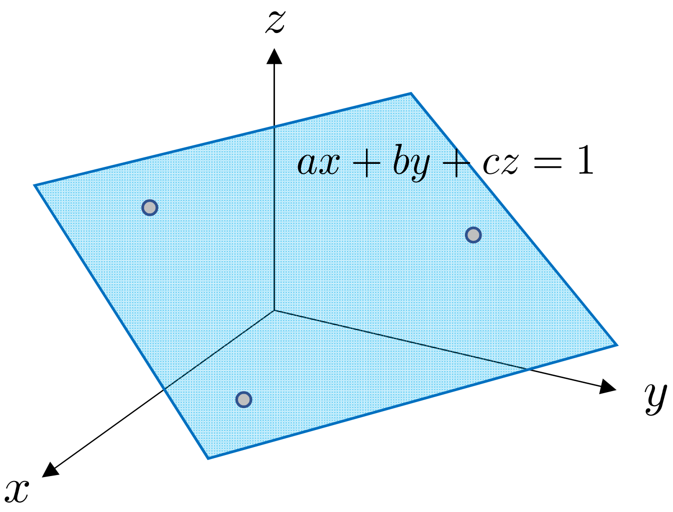
<table>
<tr><th>System of equations</th><th>Row operations</th><th>Augmented matrix</th></tr>
<tr><td>$$\begin{alignedat}{4}2x &+ y &- z &= 8\\ -3x &- y &+ 2z &= -11\\ -2x &+ y &+ 2z &= -3\end{alignedat}$$</td><td></td><td>$$\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & -1 & 8\\ -3 & -1 & 2 & -11\\ -2 & 1 & 2 & -3\end{array}\right]$$</td></tr>
<tr><td>$$\begin{alignedat}{4}2x &+ y &- z &= 8\\ &\tfrac{1}{2}y &+ \tfrac{1}{2}z &= 1\\ &2y &+ z &= 5\end{alignedat}$$</td><td>$$\begin{gathered}L_2 + \frac{3}{2}L_1 \to L_2\\ L_3 + L_1 \to L_3\end{gathered}$$</td><td>$$\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & -1 & 8\\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5\end{array}\right]$$</td></tr>
<tr><td>$$\begin{alignedat}{4}2x &+ y &- z &= 8\\ &\tfrac{1}{2}y &+ \tfrac{1}{2}z &= 1\\ & & -z &= 1\end{alignedat}$$</td><td>$$L_3 + -4L_2 \to L_3$$</td><td>$$\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & -1 & 8\\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right]$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">The matrix is now in echelon form (also called triangular form)</td></tr>
<tr><td>$$\begin{alignedat}{4}2x &+ y & &= 7\\ &\tfrac{1}{2}y & &= \tfrac{3}{2}\\ & & -z &= 1\end{alignedat}$$</td><td>$$\begin{gathered}L_2 + \frac{1}{2}L_3 \to L_2\\ L_1 - L_3 \to L_1\end{gathered}$$</td><td>$$\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 1/2 & 0 & 3/2\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right]$$</td></tr>
<tr><td>$$\begin{alignedat}{4}2x &+ y & &= 7\\ &y & &= 3\\ & & z &= -1\end{alignedat}$$</td><td>$$\begin{gathered}2L_2 \to L_2\\ -L_3 \to L_3\end{gathered}$$</td><td>$$\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right]$$</td></tr>
<tr><td>$$\begin{alignedat}{4}x & & &= 2\\ &y & &= 3\\ & & z &= -1\end{alignedat}$$</td><td>$$\begin{gathered}L_1 - L_2 \to L_1\\ \frac{1}{2}L_1 \to L_1\end{gathered}$$</td><td>$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right]$$</td></tr>
</table>

出展：https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_elimination

Exercises 3.1　演習問題 3.1

- Suppose we have three points in 3D space and their coordinates are (x,y,z)=(0.2, -0.1, 1.0), (3.0, 0.1, -1.0), and (1.0, -2.0, -0.5), respectively. Find a plane passing through these three points. Note that the equation of a plane that does not pass through the origin (0,0,0) is given by $ax + by + cz = 1$

- 3次元空間上に3点(x,y,z)=(0.2, -0.1, 1.0), (3.0, 0.1, -1.0), (1.0, -2.0, -0.5)がある．これらの3点を通る平面を求めよ．原点(0,0,0) を通らない平面は数式 $ax + by + cz = 1$ で表される.



A plane in 3D space passing through three points and not through the origin
3次元空間上の3点を通り原点を通らない平面

Hint : Set up simultaneous linear equations and solve it to determine unknowns (a,b,c)
ヒント：まず連立一次方程式を設定し、それを解いて未知数（a、b、c）を求めます。