第4章「ブール代数」

- 論理関数
- 真理値表
- 論理回路
- 主加法標準形

ブール代数の基本演算

- 2つの値(論理値):’0’と’1’
- 3つの演算

論理積（AND）
$0 \cdot 0 = 0$
$0 \cdot 1 = 0$
$1 \cdot 0 = 0$
$1 \cdot 1 = 1$

論理和（OR）
$0 + 0 = 0$
$1 + 0 = 1$
$0 + 1 = 1$
$1 + 1 = 1$

否定（NOT）
$\overline{0} = 1$
$\overline{1} = 0$

- 否定，論理積，論理和の順で優先，（カッコ）で順位変更
  - $1+(0 \cdot 1+\overline{1}) \cdot 1 = 1+(0+0) \cdot 1 = 1+0 \cdot 1 = 1+0 = 1$
- 0と1，・と＋を形式的に入れ替えても成立（双対性;duality）

論理関数と真理値表

- 論理関数＝論理値を変数とする関数
- 真理値表＝変数と値を網羅した表

例）2変数関数

$$f(A,B) = A + \overline{B}$$

A	B	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

例）3変数関数

$$f(A,B,C) = A + \overline{B} \cdot \overline{C}$$

A	B	C	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

公式

※ a と b の双対性に注意

1a) $A \cdot A = A$

1b) $A + A = A$

2a) $A \cdot B = B \cdot A$

2b) $A + B = B + A$

3) $\overline{\overline{A}} = A$

4a) $A \cdot \overline{A} = \overline{A} \cdot A = 0$

4b) $A + \overline{A} = \overline{A} + A = 1$

5a) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

5b) $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$

6a) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

6b) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

} ド・モルガンの定理

公式(続き)

5b) A+B・C = (A+B)・(A+C) の確認

A	B	C	B・C	A+B・C	A+B	A+C	(A+B)・(A+C)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

公式(続き)

6a) $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

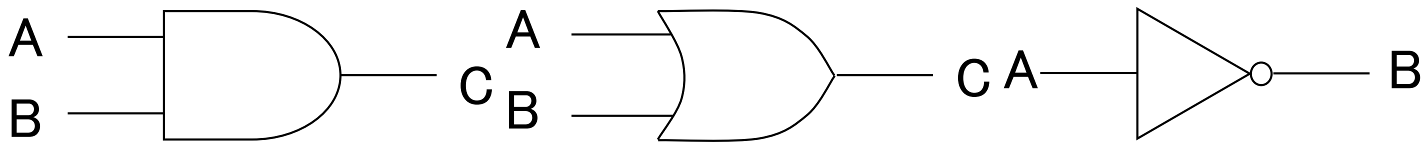
A	B	$A+B$	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

6b) $\overline{A \cdot B} = \overline{A}+\overline{B}$

A	B	$A \cdot B$	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

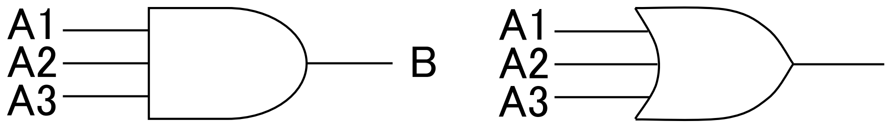
回路記号

- AND, OR, NOT



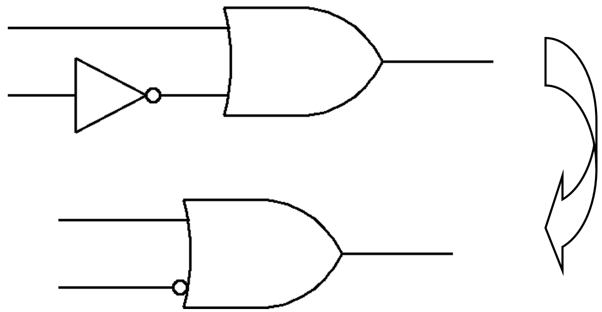
AND: $C = A \cdot B$　　OR: $C = A+B$　　NOT: $B = \overline{A}$

- 多入力AND，OR

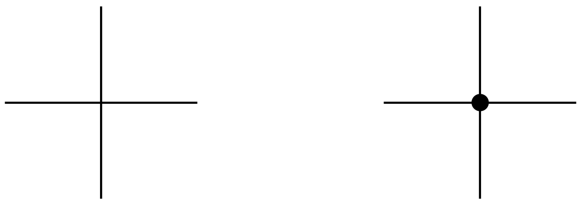


$B=A1 \cdot A2 \cdot A3$　　$B=A1+A2+A3$

- 否定の省略形



- 結線の有無

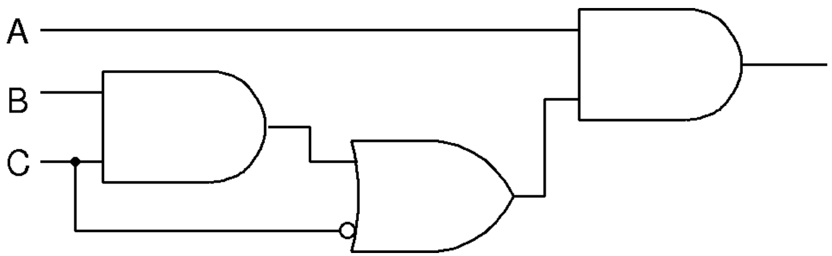


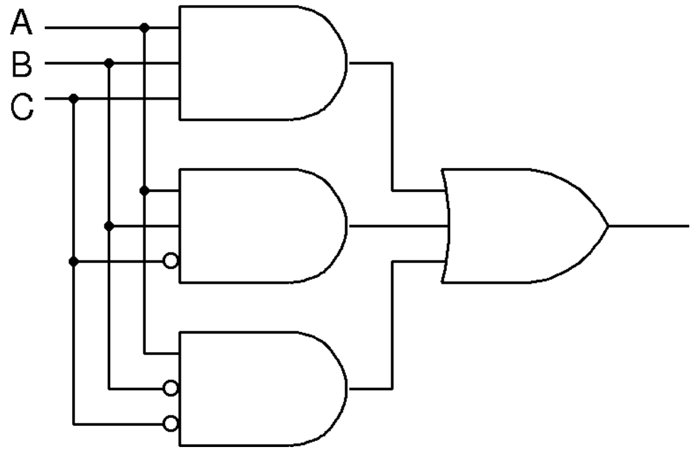
つながっていない　　つながっている

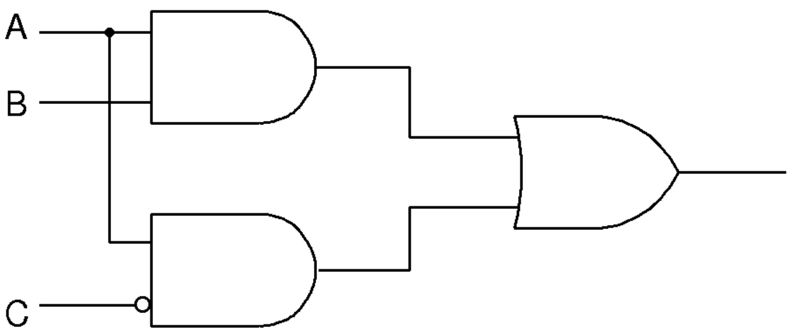
論理回路の例

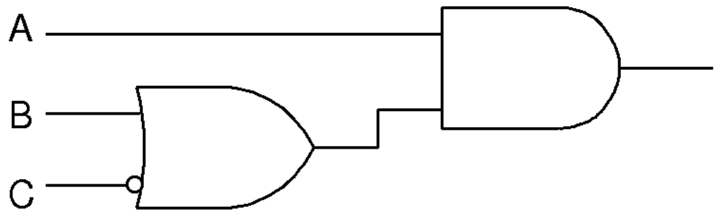
$$
\begin{aligned}
f(A,B,C) &= A(BC+\bar{C}) \\
&= ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} \\
&= AB + A\bar{C} \\
&= A(B+\bar{C})
\end{aligned}
$$

（1つの論理関数には複数の表現があり，それに対応する複数の論理回路がある）









問題の例

- 3入力多数決
  - 3つの変数(入力)のうち多い方を返す

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- じゃんけん判定
  - グー，チョキ，パーを'00'，'01'，'11'で表現
  - 「Aが勝ち」='10'，「Bが勝ち」='01'，「あいこ」='11'，「無効」='00'

A1	A2	B1	B2	f1	f2
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1

標準展開

- 加法標準形
  - 「論理積の論理和」の形に展開したもの
- 乗法標準形
  - 「論理和の論理積」の形に展開したもの

※ いずれも「論理積の否定」や「論理和の否定」を含んではならない

例）

$$
\begin{aligned}
f(A,B,C) &= \overline{\overline{A \cdot B} + \bar{A}C} + \bar{C} \\
&= AB + \bar{C} && \text{. . . 加法標準形} \\
&= (A+\bar{C})(B+\bar{C}) && \text{. . . 乗法標準形}
\end{aligned}
$$

最小項と最大項

- 最小項
  - 各変数を一つずつ含む論理積の項
  - 例）2変数 $\bar{A}\bar{B}, A\bar{B}, \bar{A}B, AB$
  - 省略表記に注意
    - 論理積は自明な場合省略: $A \cdot B \rightarrow AB$
    - 最小項での否定の表記に注

$$\overline{AB} = \overline{A \cdot B} \neq \bar{A}\bar{B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

- 最大項
  - 各変数を一つずつ含む論理和の項
  - 例）2変数 $\bar{A} + \bar{B}, A + \bar{B}, \bar{A} + B, A + B$

最小項の性質

例）3変数の最小項

A	B	C	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$AB\bar{C}$	ABC
0	0	0	1	0						
0	0	1	0	1						
0	1	0	0	0	1					
0	1	1	0	0		1				
1	0	0	0	0			1			
1	0	1	0	0				1		
1	1	0	0	0					1	
1	1	1	0	0						1

主加法標準形

・　論理関数を最小項の論理和で表現したもの（主乗法標準形もある）

例）
$$
\begin{aligned}
f(A,B,C) &= AB + \bar{C} \\
&= \underline{\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + ABC}
\end{aligned}
$$

A	B	C	AB+$\bar{C}$	f	
0	0	0	1	1	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
0	0	1	0	0	
0	1	0	1	1	$\bar{A}B\bar{C}$
0	1	1	0	0	
1	0	0	1	1	$A\bar{B}\bar{C}$
1	0	1	0	0	
1	1	0	1	1	$AB\bar{C}$
1	1	1	1	1	ABC

真理値表から論理関数を作る

例）下の真理値表に対応する論理関数は？

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$\bar{A}\bar{B}C$

$A\bar{B}C$

ABC

（答） $f(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C + ABC$

特別な2変数の論理関数

- 否定論理和（NOR），否定論理積（NAND），排他的論理和（EXOR，XORなどと表記）

A	B	NOR	NAND	排他的論理和
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

- NORもしくはNANDの一種類ですべての論理式を表現できる

NOR

$$A \cdot B = (A \oplus A) \oplus (B \oplus B)$$
$$A + B = (A \oplus B) \oplus (A \oplus B)$$
$$\bar{A} = A \oplus A$$

NAND

$$A \cdot B = (A \otimes B) \otimes (A \otimes B)$$
$$A + B = (A \otimes A) \otimes (B \otimes B)$$
$$\bar{A} = A \otimes A$$

付録

- 8ページの式変形の証明例

$$
\begin{aligned}
A(BC+\bar{C}) &= ABC + A\bar{C} && \leftarrow \text{(5a)} \\
&= ABC + A(B+\bar{B})\bar{C} && \leftarrow \text{(4b) (A・1=A)} \\
&= ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} && \leftarrow \text{(5a)} \\
&= ABC + AB\bar{C} + AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} && \leftarrow \text{(1b)} \\
&= AB(C+\bar{C}) + A(B+\bar{B})\bar{C} && \leftarrow \text{(5a)} \\
&= AB + A\bar{C} && \leftarrow \text{(4b)} \\
&= A(B+\bar{C})
\end{aligned}
$$

1a) $A \cdot A = A$
1b) $A + A = A$

2a) $A \cdot B = B \cdot A$
2b) $A + B = B + A$

3) $\overline{\overline{A}} = A$

4a) $A \cdot \overline{A} = \overline{A} \cdot A = 0$
4b) $A + \overline{A} = \overline{A} + A = 1$

5a) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
5b) $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$

6a) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
6b) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$