

6. 数値積分と常微分方程式

- 数値積分 (定積分)
- 二重積分
- 常微分方程式(ordinary differential equation : ODE)の初期値問題

数値積分

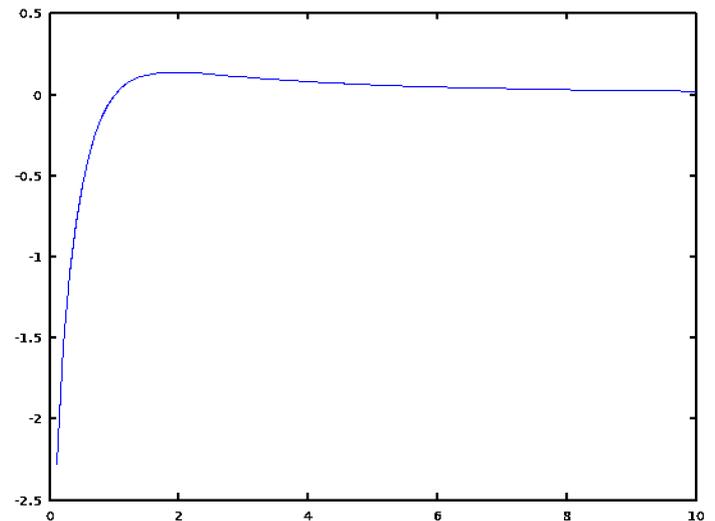
- 与えられる関数の定積分を(解析的にではなく)数値的に求めること。
- Octave では “quad” を用いて定積分を数値的に求めることが可能。

- 例: 右式の定積分を求める。
$$\int_0^{10} \frac{\log x}{1+x^2} dx$$

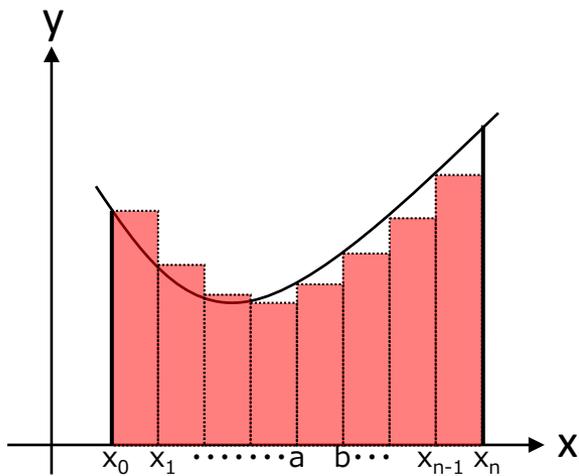
```
>> quad(@(x) (log(x)/(1+x^2)), 0, 10)
ans = -0.32938
```

- 元の関数を以下のコマンドでプロット可能

```
>> x=0:0.1:10;
>> plot(x, log(x)./(1+x.^2))
```



求積法

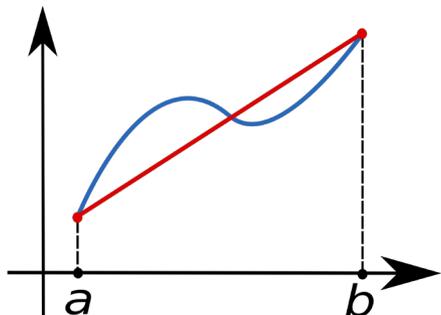


$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_a^b f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

- 定積分は近似的に数値計算する手法が提案されている。
例：台形近似、シンプソン法

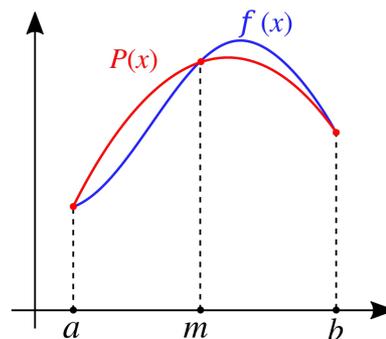
■ 台形近似(1次近似)

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$



■ シンプソン法(二次近似)

$$\frac{b - a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(b) \right]$$



余談

- シンボルを使って先ほどの関数の不定積分を求めてみると・・・。

$$\frac{\log x}{1+x^2}$$

結果

```
>> int(log(x)/(1+x^2))
ans = (sym)

      /
      |
      | log(x)
      | ----- dx
      |      2
      | x  + 1
      |
      /
>>
```

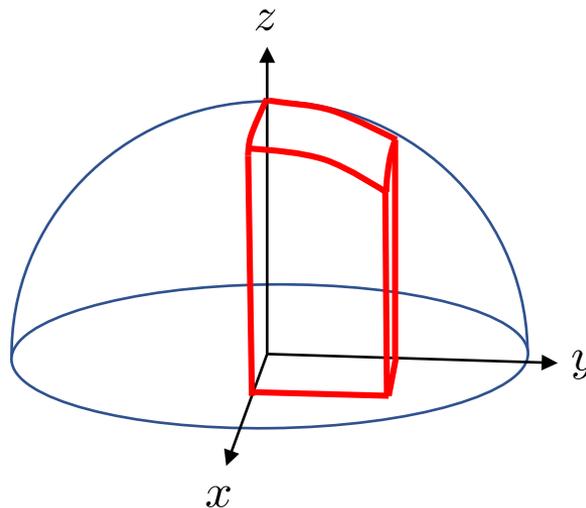
二重積分

- “dblquad” を用いることで二重積分を求めることができる。
- 例： To calculate the volume of a part of the hemisphere of a unit sphere

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

```
>> dblquad(@(x,y) (sqrt(1-x.^2-y.^2)), 0, 0.5, 0, 0.5)
ans = 0.22774
```



常微分方程式(ODE)の初期値問題 (初期値が与えられた微分方程式を解く)

- 微分方程式の例

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

- 解答例 $\int \frac{d^2y}{dt^2} dt = \int -g dt$

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1$$

$$\int \frac{dy}{dt} dt = \int (-gt + C_1) dt$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$$

- OctaveにおけるODEの初期値問題を解くステップ

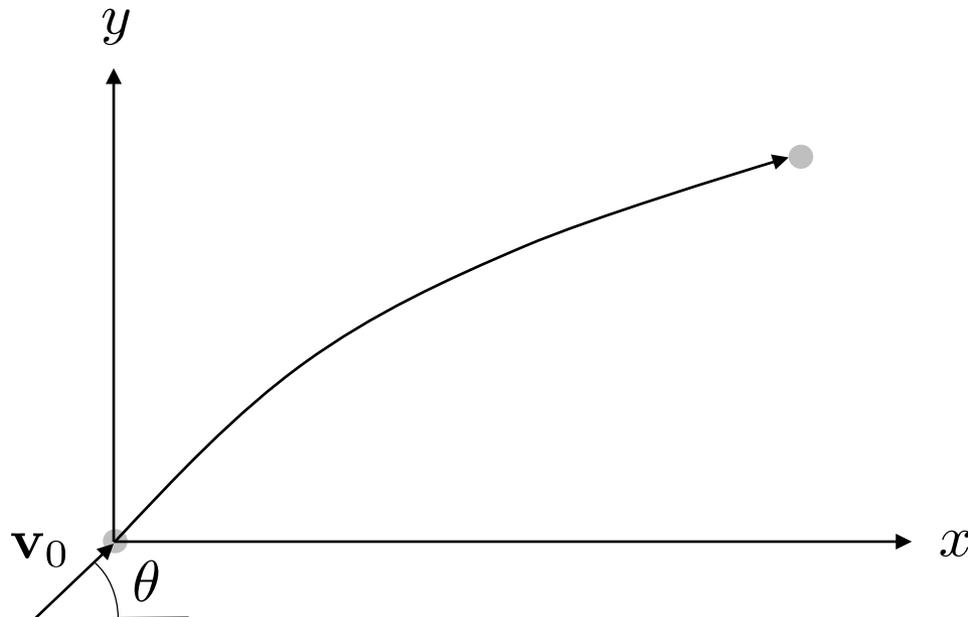
1. ターゲットとなるシステムを記述する微分方程式を導く
2. 2階以上の微分方程式の場合、新しい変数などを用いて1階の微分方程式に落とし込む
3. ステップ2で作成した微分方程式を構成する導関数をスクリプトファイルで作成する。
4. “ode45”を用いて微分方程式を解く。その際に、各変数の初期値と微分する変数のインターバルを設定する。

微分方程式の例

- 質量 m [kg]の金属球が角度 θ [rad]で打ち上げられたと仮定する。初速度は v_0 [m/s]である。
- 上記動作を示す方程式は位置 (x, y) を用いて次の様に記述できる。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad (\text{一定速度})$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g \quad (\text{重力加速度})$$



解き方(1/2)

- X方向、y方向のボールの速度をそれぞれ v_x, v_y と置く。
- 前ページの微分方程式を x, y, v_x, v_y を用いて 1 階の微分方程式に変換する。

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad \frac{dy}{dt} = v_y \quad \frac{dv_x}{dt} = 0 \quad \frac{dv_y}{dt} = -g$$

- スクリプト上でそれぞれの関数を作成する。
 - \mathbf{p} を時間 t の関数である4つの要素 x, y, v_x, v_y で構成する。

$$\mathbf{p} = (x, y, v_x, v_y)$$

- \mathbf{p} を t で微分した関数である $d\mathbf{p}/dt$ をスクリプト上に記述する。

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt} \right)$$

```
function dp = deriv_fun(t, p)
g = 9.81;
dp = [p(3), p(4), 0, -g];
endfunction
```

pの3列目

解き方(2/2)

- “ode45” を使い、時間間隔と初期値を設定して微分方程式を解く。

スクリプトで定義した関数 解く範囲の指定 $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$
t=0~0.5 t=0における
の範囲で解く P=(x, y, v_x, v_y)の値(初期値)

```
>> [T, result] = ode45(@deriv_fun, [0, 0.5], [0, 0, 4.0, 2.0])
```

- 実際のスクリプトの例

```
#deriv_fun.m
#初めにパッケージを読み込む
pkg load odepkg

#関数定義
function dp = deriv_fun(t,p)
    g = 9.81;
    dp = [p(3), p(4), 0, -g];
endfunction

#微分方程式を数値的に解く
[T, result] = ode45(@deriv_fun, [0, 0.5], [0, 0, 4.0, 2.0])
```

結果

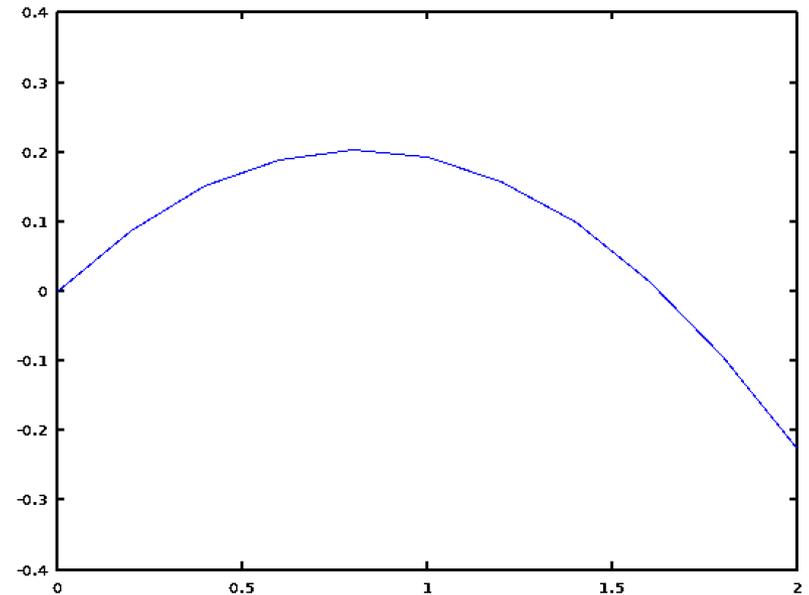
Results:

```
warning: Option "RelTol" not set, new value 0.000001 is used
warning: called from ode45 at line 113 column 5
warning: Option "AbsTol" not set, new value 0.000001 is used
warning: Option "InitialStep" not set, new value 0.050000 is used
warning: Option "MaxStep" not set, new value 0.050000 is used
```

```
T =
    0.00000
    0.05000
    0.10000
    0.15000
    0.20000
    0.25000
    0.30000
    0.35000
    0.40000
    0.45000
    0.50000
    0.50000
result =
    0.00000    0.00000    4.00000    2.00000
    0.20000    0.08774    4.00000    1.50950
    0.40000    0.15095    4.00000    1.01900
    0.60000    0.18964    4.00000    0.52850
    0.80000    0.20380    4.00000    0.03800
    1.00000    0.19344    4.00000   -0.45250
    1.20000    0.15855    4.00000   -0.94300
    1.40000    0.09914    4.00000   -1.43350
    1.60000    0.01520    4.00000   -1.92400
    1.80000   -0.09326    4.00000   -2.41450
    2.00000   -0.22625    4.00000   -2.90500
    2.00000   -0.22625    4.00000   -2.90500
```

Plot of a trajectory of the metal ball

```
>> plot(result(:,1), result(:,2))
```

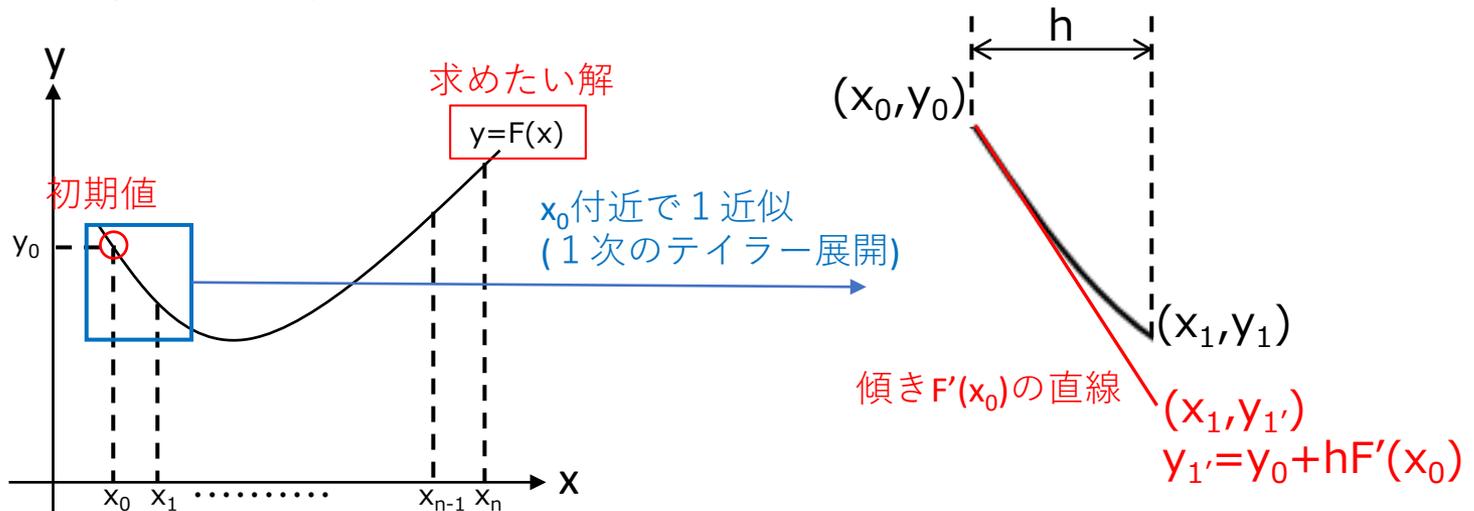


ルンゲ・クッタ法

解きたい方程式

$$dy/dx=f(x)$$

$$(F'(x)=f(x))$$



h が十分に小さければ求めたい曲線は赤の直線に近似できる。
 つまり、 $y_1 \doteq y_1'$ として y_1 を求めることができる。
 これを繰り返せば y_2, y_3, \dots, y_n を求めることができる。
 さらに1次近似でなく、2次、3次近似とすることで誤差を小さくできる。

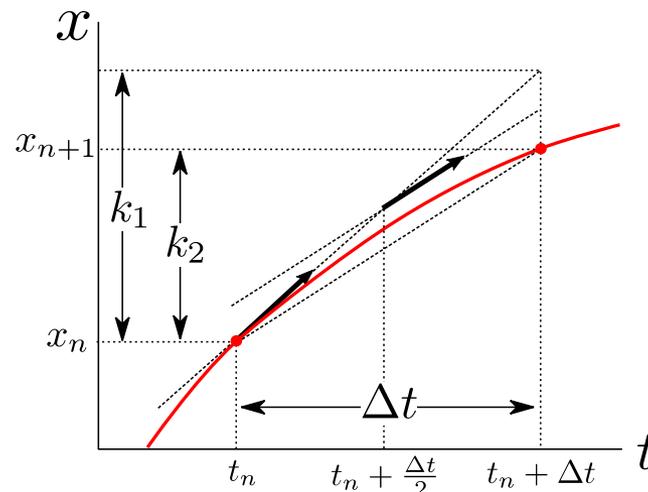
• The core of numerical solutions to ODEs is numerical integration

• 2nd order Runge-Kutta method

$$k_1 = \Delta t f(t_n, x_n)$$

$$k_2 = \Delta t f\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, x_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$x_{n+1} = x_n + k_2 (+O(\Delta t^3))$$



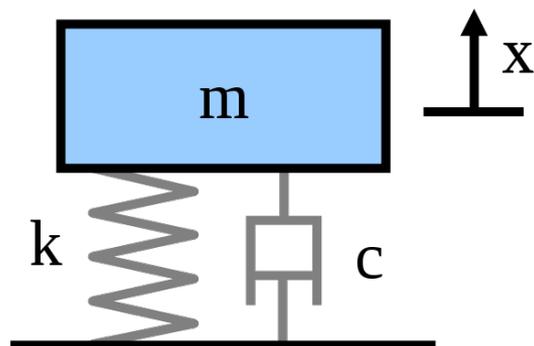
Exercise 6.1

次の図のようにばね定数 k のばねと減衰定数 c のダンパーが並列につながった質量 m の物体を考える。物体は図の x 方向にのみ動くと仮定する。このとき、物体の動きは次の方程式でつり合いの式で表される。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

減衰定数 c を「誕生月を3で割った余りに1を足した値」、ばね定数 k を「誕生日を7で割った余りに1を足した値」としたとき、 $m=1$, $x(0)=1$, $dx/dt(0)=0$ の初期値の下で、横軸時間 t 、縦軸を物体の位置 x として $x(t)$ をプロットせよ。

例；もし、誕生日が8月13日であれば減衰定数 c は"3"、ばね定数 k は"7"である。



提出先：

東北大学インターネットスクール(ISTU)上で提出
もしくは

Email: hisashi.kino.a1@tohoku.ac.jp
shimada@m.tohoku.ac.jp

※切：

2018年7月6日の午前8:50