
第4章「ブール代数」

- ・ 論理関数
- ・ 真理値表
- ・ 論理回路
- ・ 主加法標準形

ブール代数の基本演算

- 2つの値(論理値): '0' と '1'
- 3つの演算

論理積 (AND)
$0 \cdot 0 = 0$
$0 \cdot 1 = 0$
$1 \cdot 0 = 0$
$1 \cdot 1 = 1$

論理和 (OR)
$0 + 0 = 0$
$1 + 0 = 1$
$0 + 1 = 1$
$1 + 1 = 1$

否定 (NOT)
$\overline{0} = 1$
$\overline{1} = 0$

- 否定, 論理積, 論理和の順で優先, (カッコ)で順位変更
 - $1 + (0 \cdot 1 + \overline{1}) \cdot 1 = 1 + (0 + 0) \cdot 1 = 1 + 0 \cdot 1 = 1 + 0 = 1$
- 0 と 1, $\cdot$ と $+$ を形式的に入れ替えても成立(双対性;duality)

論理関数と真理値表

- ・ 論理関数＝論理値を変数とする関数
- ・ 真理値表＝変数と値を網羅した表

例) 2変数関数

$$f(A, B) = A + \overline{B}$$

A	B	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

例) 3変数関数

$$f(A, B, C) = A + \overline{B} \cdot \overline{C}$$

A	B	C	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

公式

$$1a) \quad A \cdot A = A$$

$$1b) \quad A + A = A$$

$$2a) \quad A \cdot B = B \cdot A$$

$$2b) \quad A + B = B + A$$

$$3) \quad \overline{\overline{A}} = A$$

$$4a) \quad A \cdot \overline{A} = \overline{A} \cdot A = 0$$

$$4b) \quad A + \overline{A} = \overline{A} + A = 1$$

$$5a) \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$5b) \quad A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$$

$$\left. \begin{array}{l} 6a) \quad \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \\ 6b) \quad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \end{array} \right\} \text{ド・モルガンの定理}$$

※ a と b の双対性に注意

公式(続き)

5b) $A+B \cdot C = (A+B) \cdot (A+C)$ の確認

A	B	C	$B \cdot C$	$A+B \cdot C$	$A+B$	$A+C$	$(A+B) \cdot (A+C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

公式(続き)

6a) $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

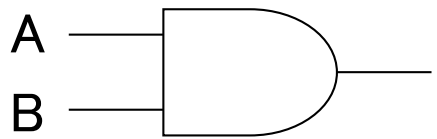
A	B	A+B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

6b) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

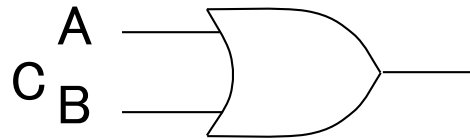
A	B	A · B	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

回路記号

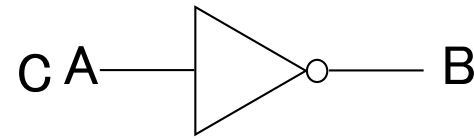
- AND, OR, NOT



AND: $C = A \cdot B$

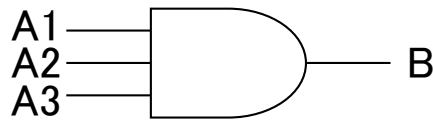


OR: $C = A + B$

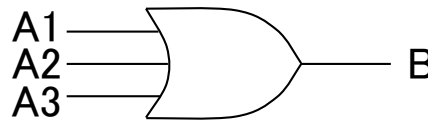


NOT: $B = \bar{A}$

- 多入力AND, OR

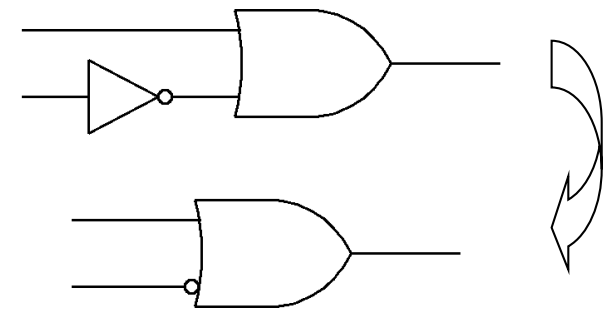


$B = A1 \cdot A2 \cdot A3$

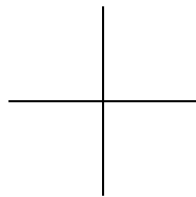


$B = A1 + A2 + A3$

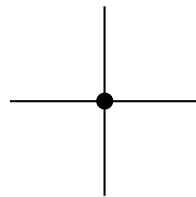
- 否定の省略形



- 結線の有無



つながっていない

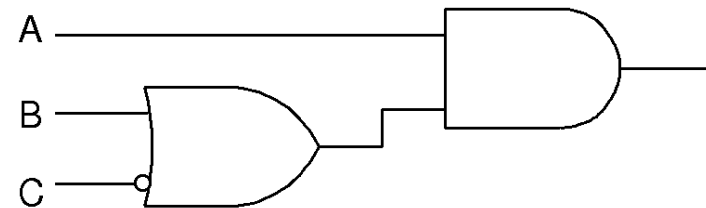
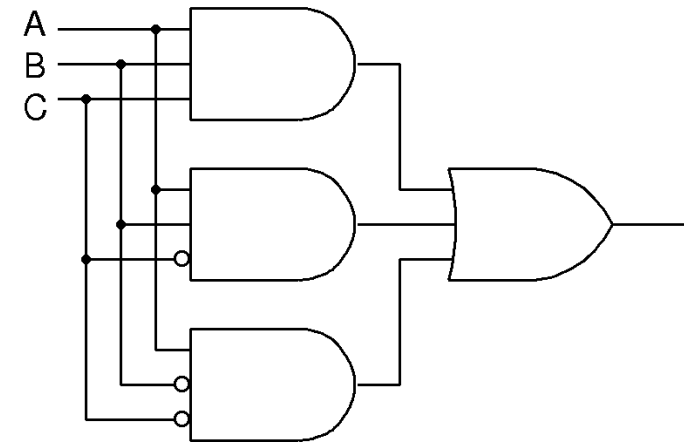
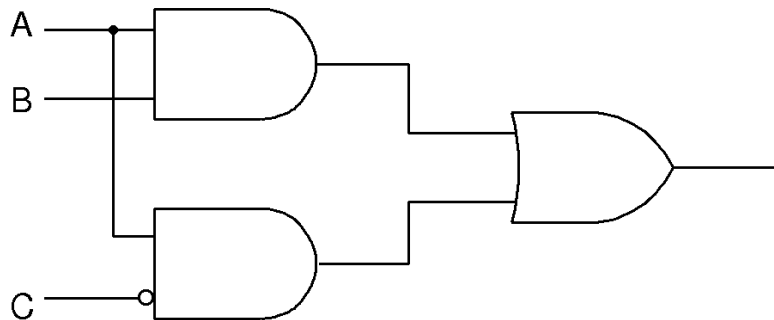
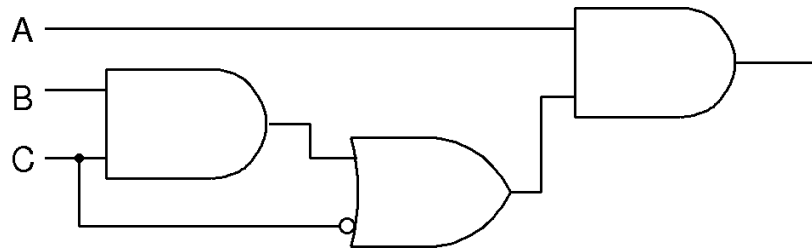


つながっている

論理回路の例

$$\begin{aligned} f(A, B, C) &= A(BC + \bar{C}) \\ &= ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} \\ &= AB + A\bar{C} \\ &= A(B + \bar{C}) \end{aligned}$$

(1つの論理関数には複数の表現があり, それに対応する複数の論理回路がある)



問題の例

・ 3入力多数決

- 3つの変数(入力)のうち多い方を返す

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

・ じゃんけん判定

- グー, チョキ, パー
を'00', '01', '11'で表現
- 「Aが勝ち」='10', 「Bが勝ち」='01',
「あいこ」='11', 「無効」='00'

A1	A2	B1	B2	f1	f2
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1

標準展開

- ・ 加法標準形
 - 「論理積の論理和」の形に展開したもの
- ・ 乗法標準形
 - 「論理和の論理積」の形に展開したもの

※ いずれも「論理積の否定」や「論理和の否定」を含んではならない

$$\begin{aligned}\text{例) } f(A, B, C) &= \overline{A \cdot B + \bar{A}C} + \bar{C} \\ &= AB + \bar{C} \quad \dots \text{ 加法標準形} \\ &= (A + \bar{C})(B + \bar{C}) \quad \dots \text{ 乗法標準形}\end{aligned}$$

最小項と最大項

- ・ 最小項

- 各変数を一つずつ含む論理積の項
- 例) 2変数 $\bar{A}\bar{B}, A\bar{B}, \bar{A}B, AB$
- 省略表記に注意
 - ・ 論理積は自明な場合省略: $A \cdot B \rightarrow AB$
 - ・ 最小項での否定の表記に注

$$\overline{AB} = \overline{A \cdot B} \neq \bar{A}\bar{B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

- ・ 最大項

- 各変数を一つずつ含む論理和の項
- 例) 2変数 $\bar{A} + \bar{B}, A + \bar{B}, \bar{A} + B, A + B$

最小項の性質

.....

例) 3変数の最小項

A	B	C	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$AB\bar{C}$	ABC
0	0	0	1	0						
0	0	1	0	1						
0	1	0	0	0	1					
0	1	1	0	0		1				
1	0	0	0	0			1			
1	0	1	0	0				1		
1	1	0	0	0					1	
1	1	1	0	0						1

主加法標準形

- 論理関数を最小項の論理和で表現したもの（主乗法標準形もある）

例) $f(A, B, C) = AB + \bar{C}$

$$= \underline{\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + ABC}$$

A	B	C	$AB + \bar{C}$	f
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

$\bar{A}B\bar{C}$

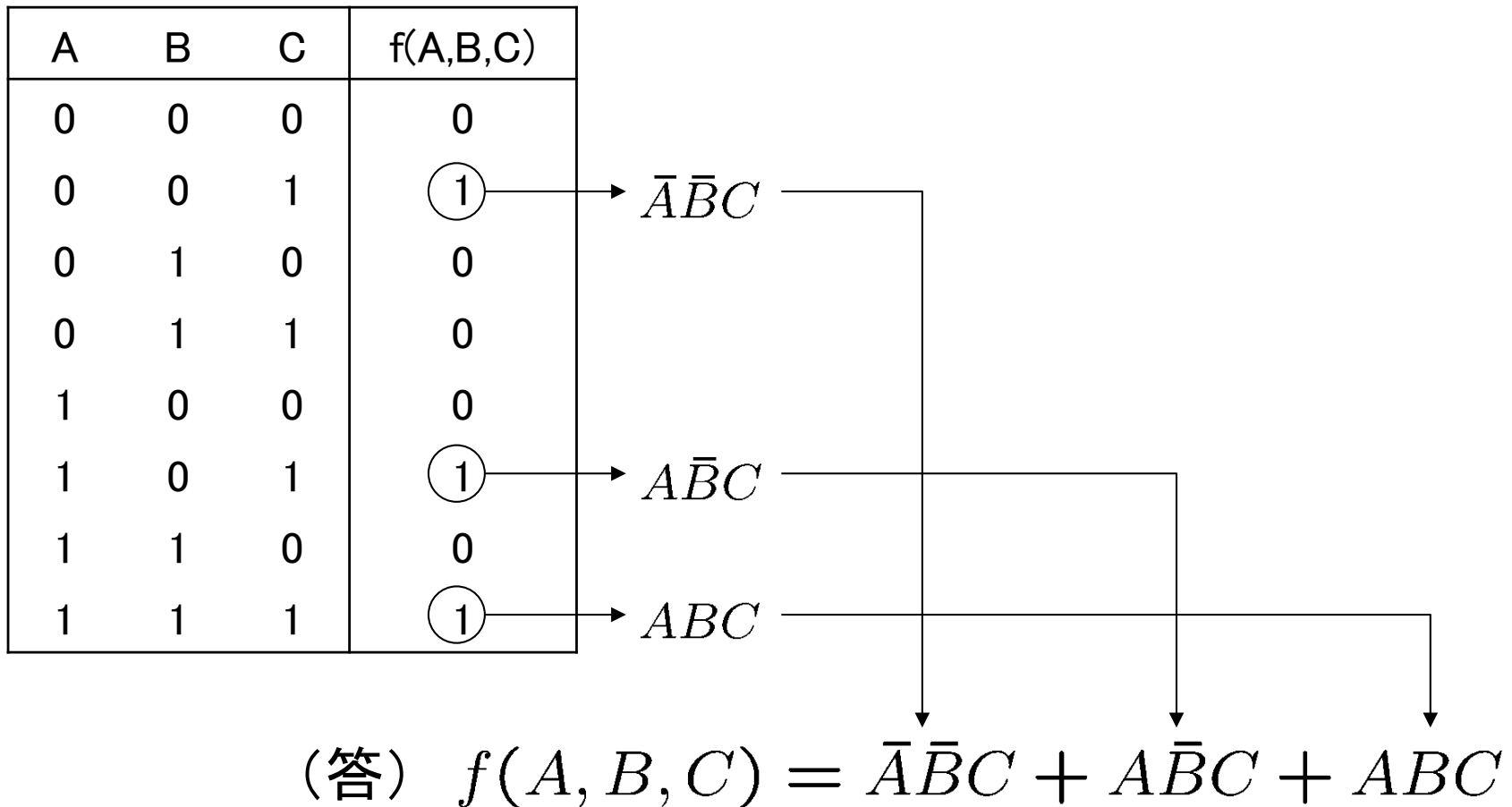
$A\bar{B}\bar{C}$

$AB\bar{C}$

ABC

真理値表から論理関数を作る

例) 下の真理値表に対応する論理関数は？



特別な2変数の論理関数

- 否定論理和(NOR), 否定論理積(NAND), 排他的論理和(EXOR, XORなどと表記)

A	B	NOR	NAND	排他的論理和
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

- NORもしくはNANDの一種類ですべての論理式を表現できる

NOR

$$\begin{aligned}A \cdot B &= (A \oplus A) \oplus (B \oplus B) \\ A + B &= (A \oplus B) \oplus (A \oplus B) \\ \bar{A} &= A \oplus A\end{aligned}$$

NAND

$$\begin{aligned}A \cdot B &= (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \\ A + B &= (A \otimes A) \otimes (B \otimes B) \\ \bar{A} &= A \otimes A\end{aligned}$$

付録

・ 8ページの式変形の証明例

$$A(BC + \bar{C}) = ABC + A\bar{C} \quad \leftarrow (5a)$$

$$= ABC + A(B + \bar{B})\bar{C} \quad \leftarrow (4b) (A \cdot 1 = A)$$

$$= ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} \quad \leftarrow (5a)$$

$$= ABC + AB\bar{C} + AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} \quad \leftarrow (1b)$$

$$= AB(C + \bar{C}) + A(B + \bar{B})\bar{C} \quad \leftarrow (5a)$$

$$= AB + A\bar{C} \quad \leftarrow (4b)$$

$$= A(B + \bar{C})$$

$$1a) A \cdot A = A$$

$$1b) A + A = A$$

$$2a) A \cdot B = B \cdot A$$

$$2b) A + B = B + A$$

$$3) \bar{\bar{A}} = A$$

$$4a) A \cdot \bar{A} = \bar{A} \cdot A = 0$$

$$4b) A + \bar{A} = \bar{A} + A = 1$$

$$5a) A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$5b) A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$$

$$6a) \overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$6b) \overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$