第6回
数値積分，常微分方程式 with Octave

2021.06.28（Mon.）

菅沼 雅徳，川越 吉晃

Comment Screen

本日の講義内容

- 数値積分および常微分方程式をOctaveで解く
- Octaveでの常微分方程式の解き方について
- Octaveでの積分方法について

今回の演習課題

感染症の流行を表す下記の微分方程式を解くプログラム

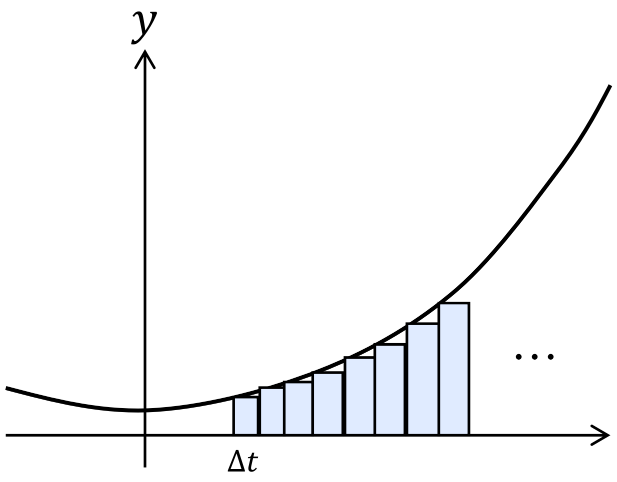
- $\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t)$
- $\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$
- $\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t)$

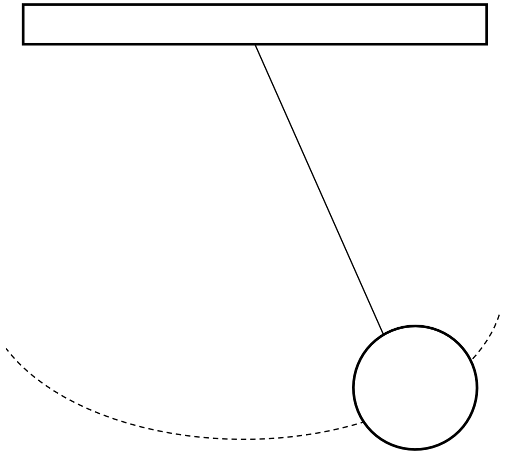
常微分方程式

- 未知関数$y(x)$とその微分$y' = \dfrac{dy}{dx}$，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dots$ を含む方程式

- 例）質点の運動方程式（$F = ma(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$），感染症の流行予測モデルなど

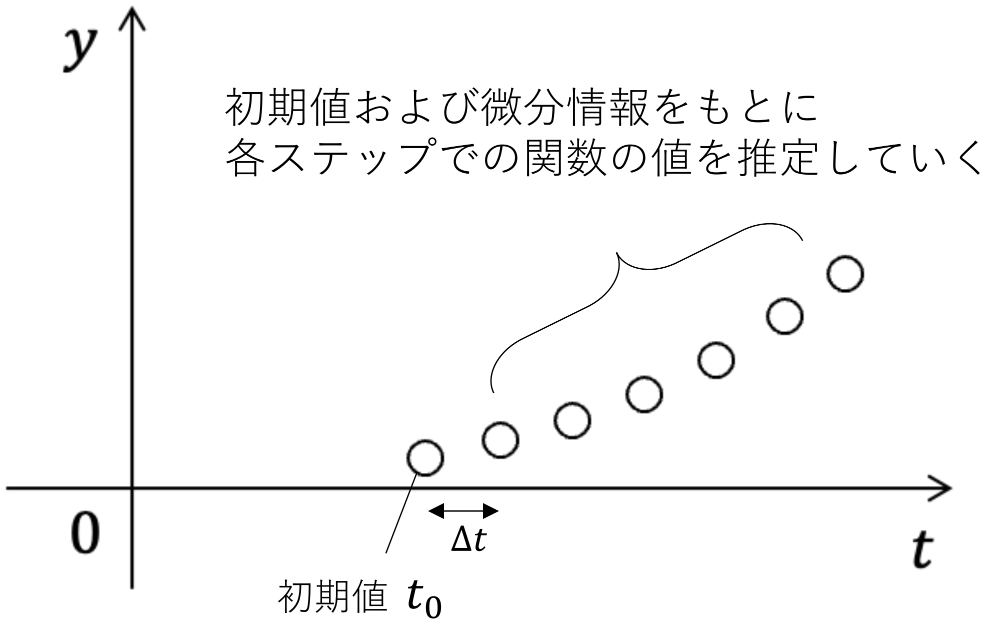
- 解析的に（積分することで）常微分方程式を解けるケースは少ないため，数値積分によって解くことが多い

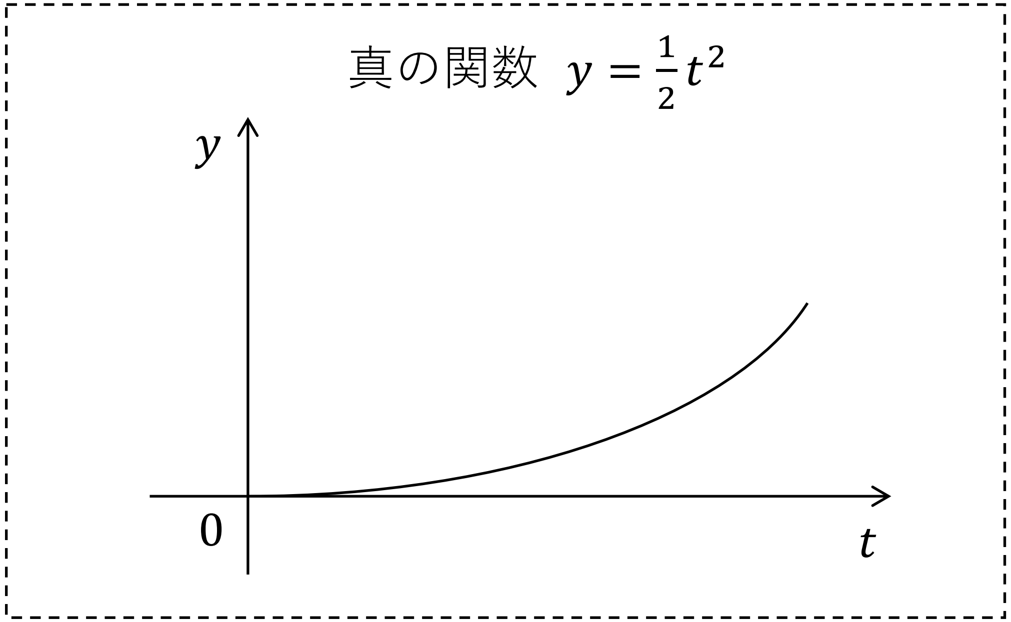




数値的に解くとは

- 微分方程式の解の初期値を与え，あとは初期値と微分情報を頼りに微小ステップ（dt）ごとの出力値を計算していく
- 以下では簡単のために，$\frac{dy}{dt} = t$ の微分方程式を例に考えていく



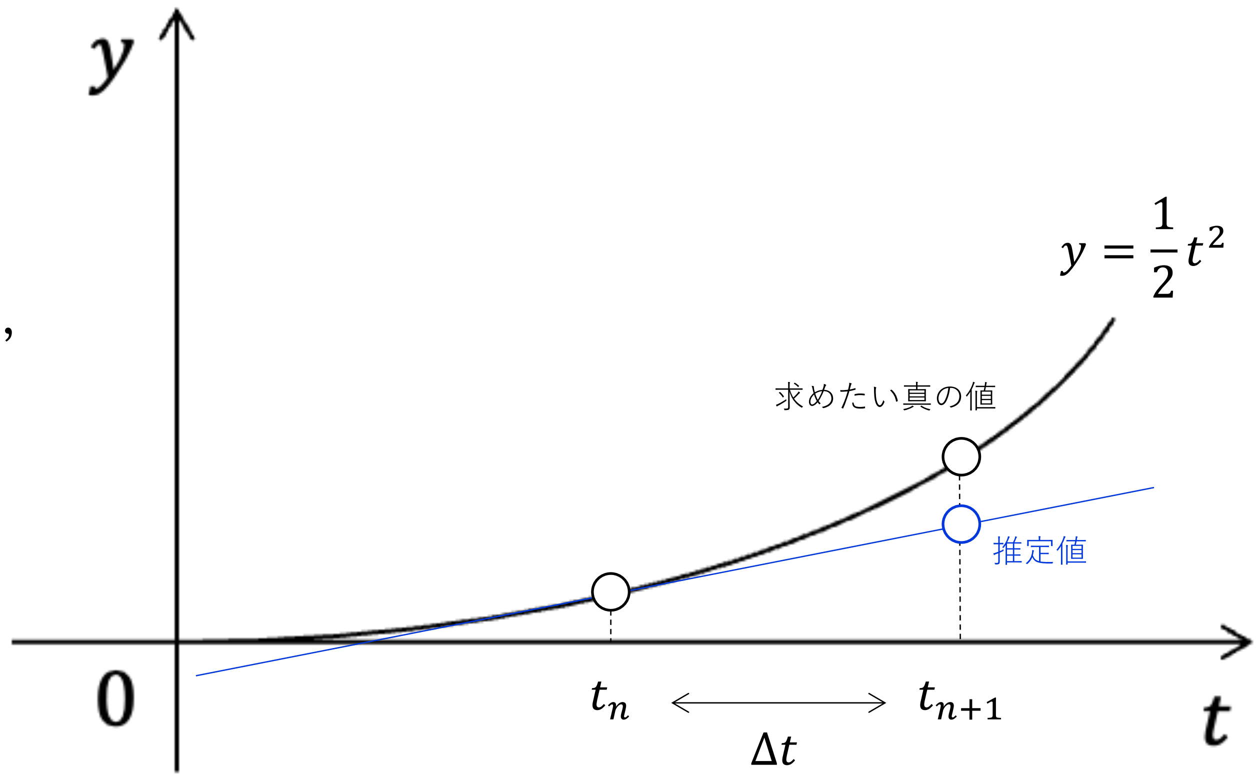


1次オイラー法

- 数値的に微分方程式を解くシンプルな方法の一つ
- 各ステップでの出力値を以下で算出

$$y_{n+1} = y_n + \frac{dy}{dt}\Delta t$$

- Δtを小さくすることでそれなりの精度になりそうだが，計算コスト大
- 1ステップにおける真の関数との誤差は，
$\frac{1}{2}(t_n + \Delta t)^2 - \{t_n(t_n + \Delta t) - \frac{1}{2}t_n^2\}$
$= \frac{1}{2}\Delta t^2$



4次ルンゲクッタ法

- オイラー法では近似精度が微妙なため，より精緻な近似を行う
- 4次ルンゲクッタ法では下記に基づいて次ステップの値を算出する

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta t$$

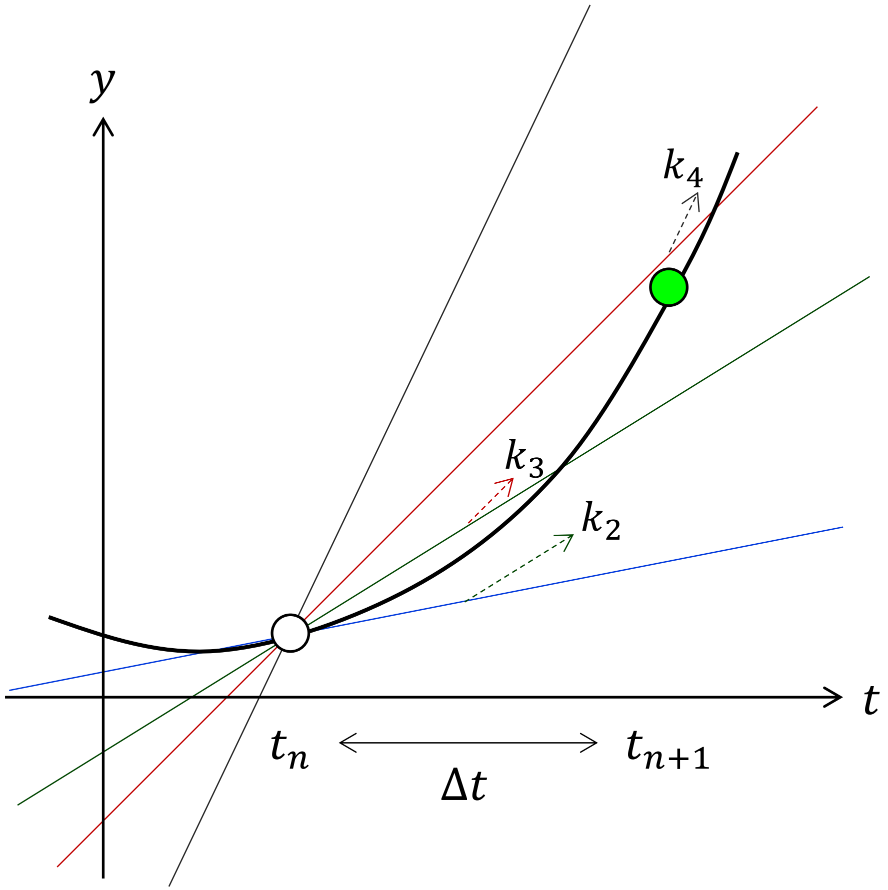
$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta t k_3)$$

※ $f(t,y) = \frac{dy}{dt}$



4次ルンゲクッタ法

- オイラー法では近似精度が微妙なため，より精緻な近似を行う
- 4次ルンゲクッタ法では下記に基づいて次ステップの値を算出する

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta t$$

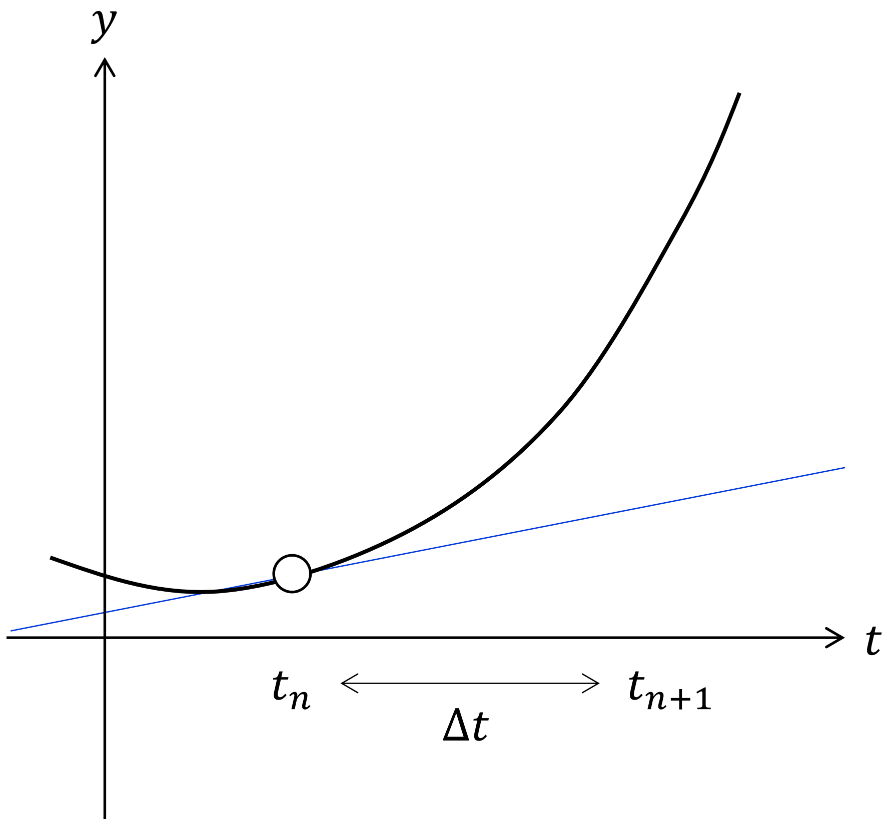
$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta t k_3)$$

※ $f(t, y) = \frac{dy}{dt}$



4次ルンゲクッタ法

- オイラー法では近似精度が微妙なため，より精緻な近似を行う
- 4次ルンゲクッタ法では下記に基づいて次ステップの値を算出する

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta t$$

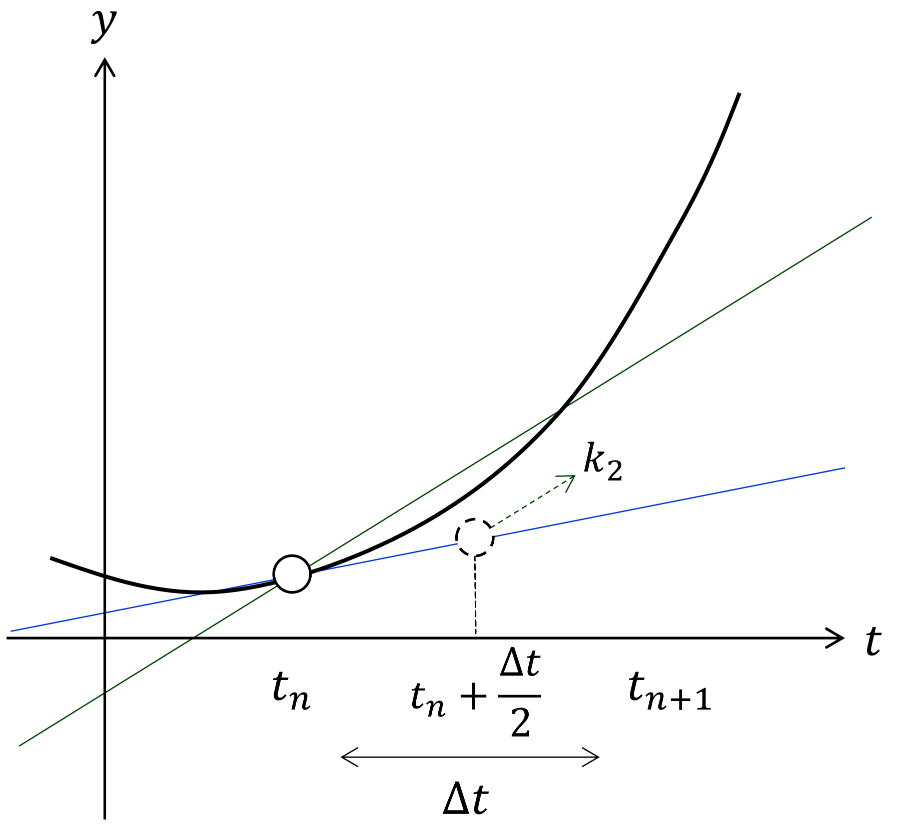
$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta t k_3)$$

※ $f(t,y) = \frac{dy}{dt}$



4次ルンゲクッタ法

- オイラー法では近似精度が微妙なため，より精緻な近似を行う
- 4次ルンゲクッタ法では下記に基づいて次ステップの値を算出する

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta t$$

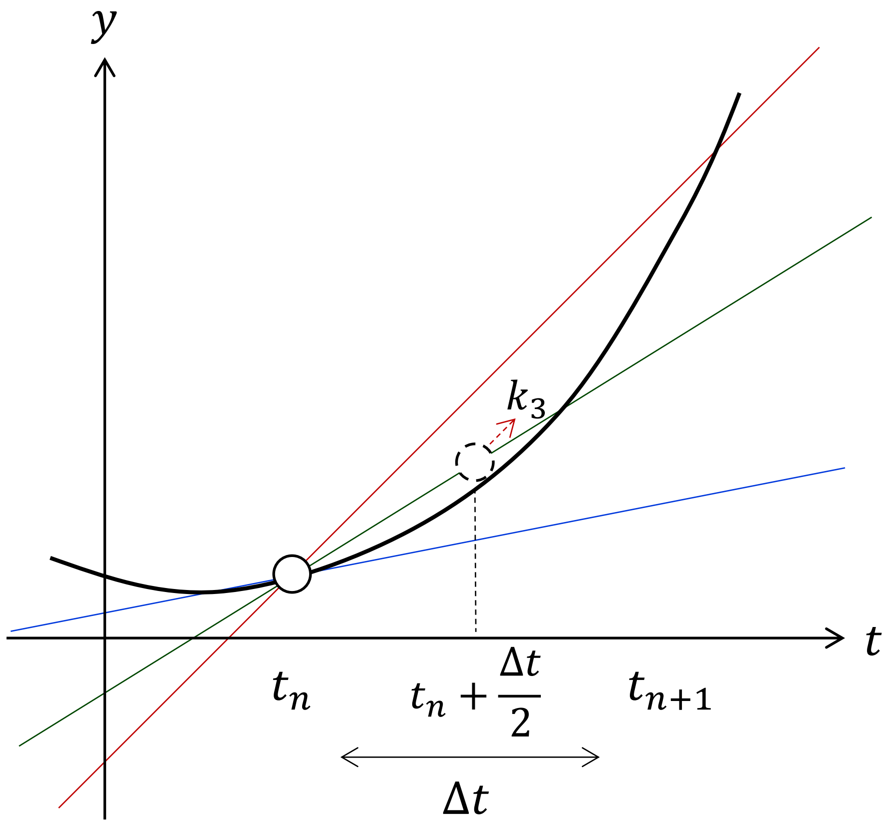
$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta t k_3)$$

※ $f(t, y) = \frac{dy}{dt}$



4次ルンゲクッタ法

- オイラー法では近似精度が微妙なため，より精緻な近似を行う
- 4次ルンゲクッタ法では下記に基づいて次ステップの値を算出する

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta t$$

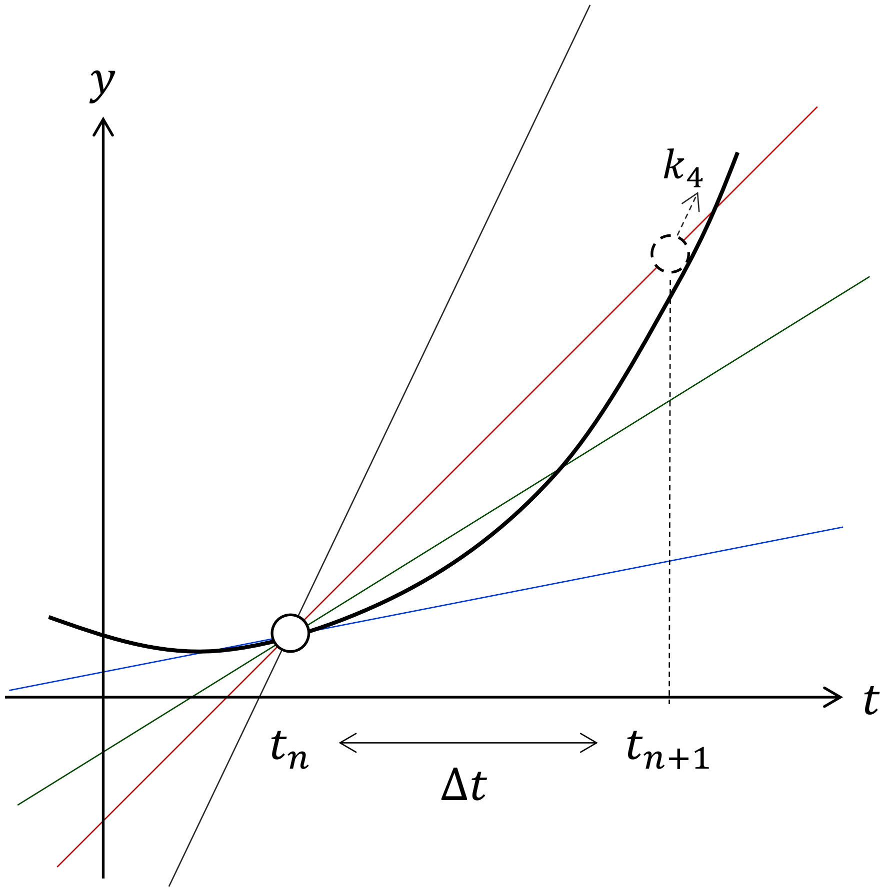
$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta t k_3)$$

※ $f(t, y) = \frac{dy}{dt}$



4次ルンゲクッタ法

- オイラー法では近似精度が微妙なため，より精緻な近似を行う
- 4次ルンゲクッタ法では下記に基づいて次ステップの値を算出する

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta t$$

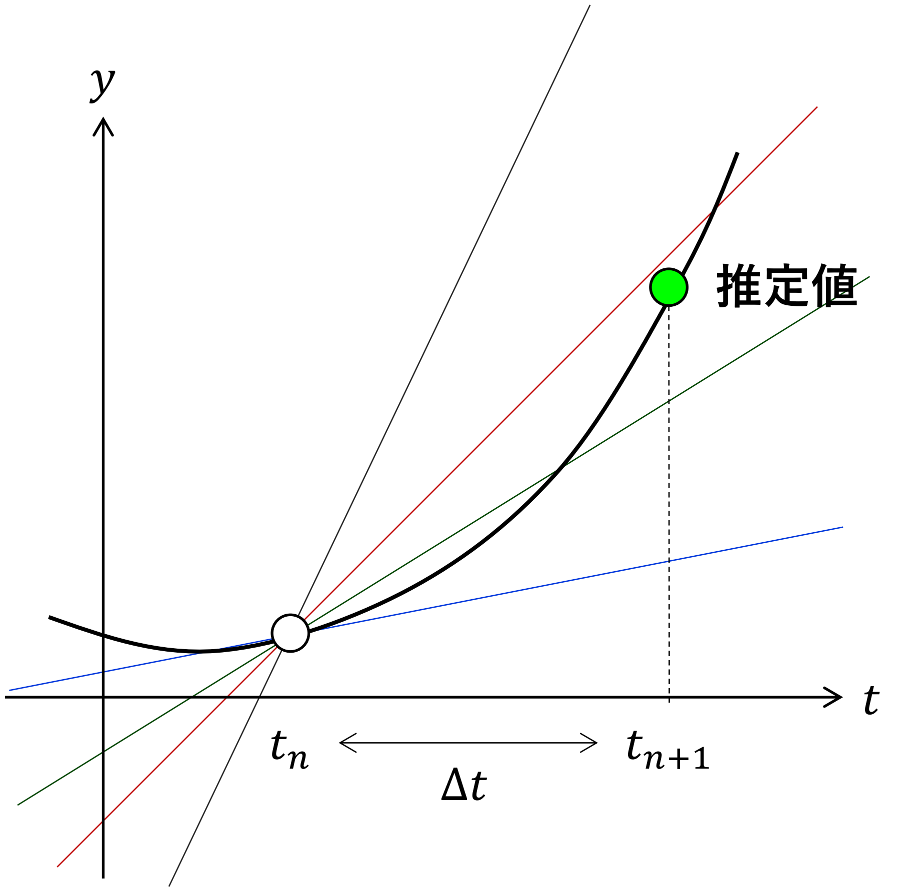
$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta t k_3)$$

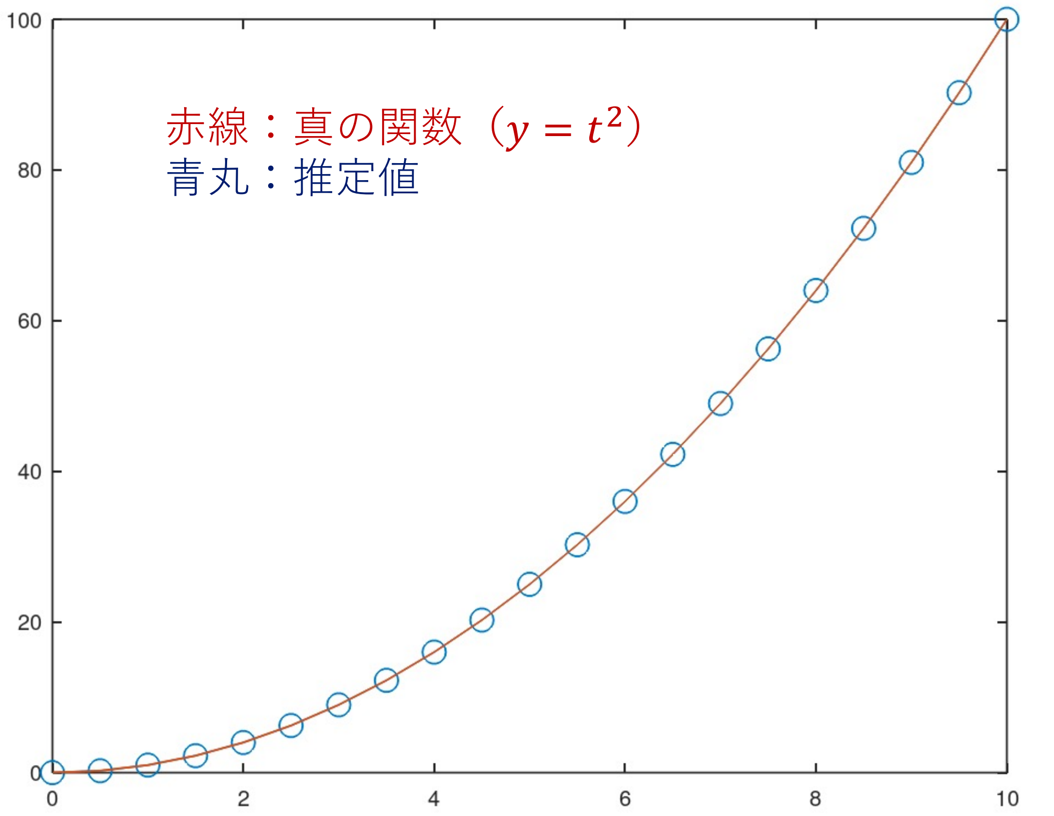
k_1~k_4の重み付き平均の傾きを使って，
y_{n+1}を求める



ルンゲクッタ法 with Octave

- ode45関数で実行可能
- ode45(微分方程式, 積分区間, 初期値)
- $\frac{dy}{dt} = 2t$ を解く例

```
# 積分区間
tspan = 0:0.5:10;
# 初期値
y0 = 0;
# 解きたい微分方程式
function dy = deriv_y(t, y)
  dy = 2*t;
end
# tspanの区間を積分
[t, y] = ode45(@deriv_y, tspan, y0);
# 結果をプロット
plot(t, y, '-o')
hold on
# 真の結果は赤線でプロット
y = tspan.^2
plot(tspan, y, 'MarkerEdgeColor', 'r')
```



2階微分方程式の解き方 with Octave

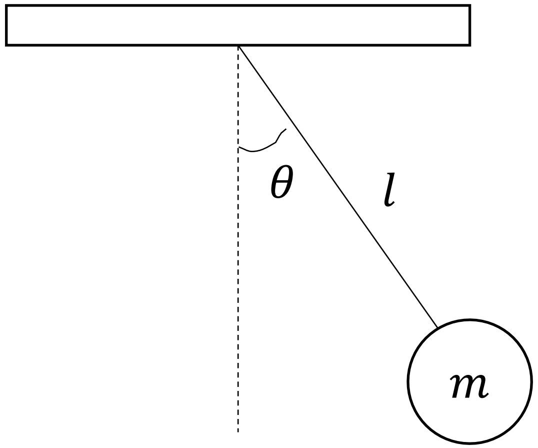
- 下記の単振り子の運動方程式を解くことを考える

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} + kl\frac{d\theta}{dt} + mgsin\theta = 0$$

m: 質量　l: 糸の長さ　θ: 角度　k: 減衰係数　g: 重力加速度

- ode45関数を使用する場合は，**高次の微分方程式を1次の微分方程式に分解する必要**がある
- ここでは，$\theta = y_1$，$\frac{d\theta}{dt} = y_2$ とおくことで，下記のように**2つの1次微分方程式に分解可能**

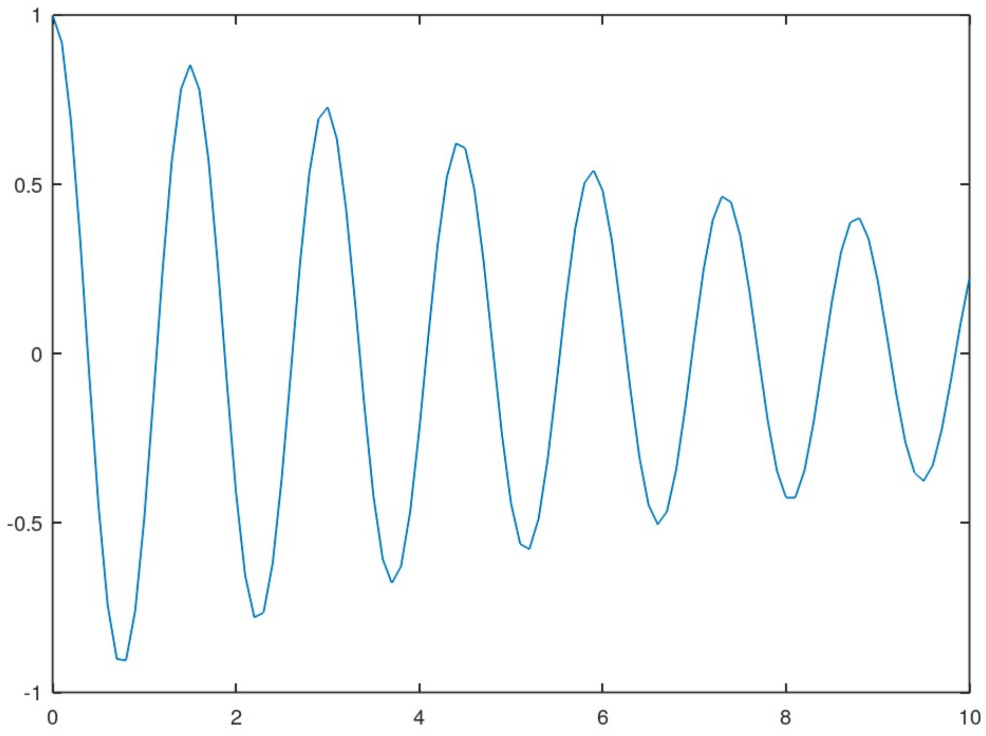
- $\frac{dy_1}{dt} = y_2$
- $\frac{dy_2}{dt} = \frac{-kly_2 - mgsin(y_1)}{ml}$



2階微分方程式の解き方 with Octave

- $\frac{dy_1}{dt} = y_2$
- $\frac{dy_2}{dt} = \frac{-kly_2 - mgsin(y_1)}{ml}$
- 上記二つの微分方程式をode45関数に入力することで解ける

```
# 積分区間および初期値
tspan = 0:0.1:10;
p0 = [1, 0];
# dy1/dt, dy2/dt の定義
function dy = deriv_pend(t, y)
  g = 9.8;
  m = 1.0;
  l = 0.5;
  k = 0.2;
  dy = [y(2), -1/(m*l)*(k*l*y(2)+m*g*sin(y(1)))];
end
# ode45で上記の微分方程式を解く
[T, Y] = ode45(@deriv_pend, tspan, p0);
plot(T, Y(:,1), '-')
```



（補足）積分 with Octave

- integral関数
- integral(function, xmin, xmax)
  - 関数functionを[xmin, xmax]の範囲で積分する
  - 下記に$\int_0^{10} \frac{logx}{1+x^2}dx$ の例

```
# integ.m
# 積分
func = @(x) (log(x)./(1.0+x.^2));
q = integral(func,0,10)
```

```
>> integ
q = -0.3294
```

演習課題

次の微分方程式を解くプログラムを書いて解とともに提出してください

- 感染症の流行を表す微分方程式
  - $\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t)$ 感受性保持者（未感染者数）
  - $\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$ 感染者数
  - $\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t)$ 免疫保持者数
  - なお，$S(0) = 10000,\ I(0) = 10,\ \beta = 0.0001,\ \gamma = 0.1$ とする ※ β: 感染症率，γ: 回復率
  - 横軸t ([0, 30])，縦軸$I(t), S(t)$ としてプロットした図を提出してください